ФГБОУ ВО «Адыгейский государственный университет»
Кафедра математического анализа и методики преподавания математики

А.Х. СТАШ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Майкоп
ЭлИТ
2025

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.61.я73
С 78

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Т. И. Дёмина

кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой математики, физики и системного анализа
ФГБОУ ВО «Майкопский государственный технологический университет»

А. Д. Ушхо

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теоретической физики
ФГБОУ ВО «Адыгейский государственный университет»

Сташ А.Х.

С78 Дифференциальные уравнения в примерах и задачах [электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / А.Х. Сташ – электрон. дан. (1 файл pdf – 2,16 Мб) – Майкоп : ЭлИТ, 2025. Режим доступа: https://166b74f5-71ba-4511-9f9f-40c90910fe60.selstorage.ru/978-5-6054009-4-3.pdf

ISBN 978-5-6054009-4-3 **EDN RJDEDR**

Пособие содержит задачи по университетскому курсу «Дифференциальные уравнения».

В пособии изложены краткие теоретические сведения, поясняющие методы интегрирования дифференциальных уравнений определенного вида, приведены подробные решения типовых задач, предложены варианты контрольных работ, а также задачи для самостоятельной работы, снабженные ответами.

Предназначено для повышения эффективности самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Математика», «Прикладная математика и информатика» и «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.61.я73

ISBN 978-5-6054009-4-3
9 785605 400943 >

https://elibrary.ru/rjdedr

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебно-методическое пособие содержит стандартные задачи по курсу «Дифференциальные уравнения». Оно состоит из предисловия, трех глав, содержащих 14 разделов, ответов к заданиям для самостоятельной работы и списка литературы. Первая глава является по своему содержанию вводной, так как они посвящены изложению общих сведений о дифференциальных уравнениях. В остальных главах рассматриваются методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (исключая системы таких уравнений).

Каждая глава включает в себя изложение кратких теоретических сведений, подробное решение типовых задач, варианты контрольной работы, а также задачи для самостоятельной работы студентов, снабженные ответами.

Часть материалов заимствованы из известных задачников М.Л. Краснова и Г.И. Макаренко, А.Ф. Филиппова, А.М. Самойленко и др., В.К. Романко и др., учебников В.В. Степанова, А.Ф. Филиппова. Ряд задач разработаны автором.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика» и «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» на этапе бакалаврской подготовки.

Автор глубоко признателен профессору М.М. Шумафову за ценные замечания, а также доцентам Т.И. Дёминой и А.Д. Ушхо, любезно взявшим на себя рецензирование рукописи.

Глава 1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях

1.1. Основные понятия

Соотношение

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные до некоторого порядка, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Например:

$$1)\ \frac{dy}{dx} + y\cos x = 0, \quad 2)\ y''' - \frac{1}{x+1}y'' + y'\sin x = 0, \quad 3)\ \frac{dy}{dx} + y\cos x = 0.$$

В дифференциальном уравнении вместо производных искомой функции могут содержаться ее дифференциалы (см. пример 3)).

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение (1).

Например: дифференциальное уравнение

$$y^{(V)} + xy'' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$$

- уравнение 5-го порядка.

Уравнение (1) не разрешено относительно старшей производной, а уравнение вида

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right), \qquad (2)$$

где $f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ - заданная функция от $n+1$ переменных, называется *дифференциальным уравнением* n *- го порядка, разрешенным относительно старшей производной.*

Решением уравнения (1) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, подстановка которой в (1) вместо искомой функции обращает его в тождество по независимой переменной x. Неявная форма $\Phi(x, y) = 0$ решения дифференциального уравнения (1) называется *интегралом*.

Пример 1. Показать, что функция $y = e^x + xe^x$ является решением уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{3}$$

Решение. Найдем производные функции до второго порядка:

$$y' = 2e^x + xe^x, \quad y'' = 3e^x + xe^x.$$

Подставляя выражения y, y', y'' в уравнение (3), получим тождество

$$3e^x + xe^x - 4e^x - 2xe^x + e^x + xe^x \equiv 0.$$

График решения уравнения (1) называется *интегральной кривой*.

Дифференциальные уравнения, в отличие от алгебраических, могут иметь бесконечные множества решений. Так, уравнению $y' - 2x = 0$ удовлетворяет функция

$$y = x^2 + C \tag{4}$$

при любом постоянном C. Если из полученного семейства функции (множества решений) требуется выделить конкретное решение, то должно быть задано и начальное условие, то есть значение искомой функции при каком-то значении x. Например, задание начального условия $y(1) = 5$ позволяет найти значение C. Подставляя в семейство (4) заданные значения $x = 1, y = 5$, найдем $C = 4$, а значит, искомое решение есть $y = x^2 + 4$.

Постановка задачи Коши. Пусть правая часть уравнения (2) непрерывна в некоторой области D координатного пространства переменных $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$. Требуется найти решение $y = \varphi(x)$ на некотором интервале I, содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(x_0) = y_0, \ \varphi'(x_0) = y'_0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $\left(x_0, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$.

Формально задача Коши для уравнения (2) записывается в виде

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right), \\ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

где $y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$ заданные числа.

Общим решением дифференциального уравнения (1) называется функция

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \tag{5}$$

зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \cdots, C_n$ и такая, что

1) она удовлетворяет уравнению (1) при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \cdots, C_n$;
2) для любых допустимых начальных условий

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{6}$$

найдется набор $C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0$ значений произвольных постоянных, что функция $y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0)$ будет удовлетворять условиям (6).

Если семейство (5) задается неявно уравнением $\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n)=0$, то последнее называется *общим интегралом*.

Геометрически общий интеграл (или, в частности, общее решение) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от n параметров $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

Решение дифференциального уравнения (1), получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \cdots, C_n$, называется *частным решением*.

Некоторые дифференциальные уравнения могут иметь такие решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольных постоянных. Эти решения не являются частными и называются *особыми*. Особые решения могут иметь те уравнения, для которых задача Коши имеет более одного решения.

Пример 2. Проверить, что семейство функций

$$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x \tag{7}$$

образует общее решение уравнения

$$y'''+y'=0, \tag{8}$$

и найти частное решение, удовлетворяющее условиям

$$y(0)=1,\ \ y'(0)=2,\quad y''(0)=3. \tag{9}$$

Решение. Подставляя в данное уравнение вместо y' и y''' выражения из равенств

$$y'=-C_2\sin x+C_3\cos x,\quad y'''=C_2\sin x-C_3\cos x,$$

будем иметь

$$C_2 \sin x - C_3 \cos x - C_2 \sin x + C_3 \cos x \equiv 0,$$

т.е. функция (7) удовлетворяет уравнению (8) при любых значениях постоянных C_1, C_2, C_3. Учитывая произвольные начальные данные x_0, y_0, y_0', y_0'' из семейства (7), получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cos x_0 + C_3 \sin x_0 = y_0, \\ -C_2 \sin x_0 + C_3 \cos x_0 = y_0', \\ -C_2 \cos x_0 - C_3 \sin x_0 = y_0''. \end{cases} \tag{10}$$

Так как главный определитель этой системы относительно C_1, C_2, C_3

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 \\ 0 & -\sin x_0 & \cos x_0 \\ 0 & -\cos x_0 & -\sin x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x_0 & \cos x_0 \\ -\cos x_0 & -\sin x_0 \end{vmatrix} = \sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1$$

не равен нулю, то она имеет единственное решение $\left(C_1^0, C_2^0, C_3^0\right)$. Поэтому семейство функций (7) есть общее решение уравнения (8).

Подставляя начальные данные из (9) в систему (10), получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_3 = 2, \\ -C_2 = 3, \end{cases}$$

из которой следует $C_1 = 4,\ C_2 = -3,\ C_3 = 2$. Следовательно, решение уравнения (8) с условиями (9) имеет вид $y = 4 - 3\cos x + 2\sin x$.

Задача решения или интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении общего решения или общего интеграла данного дифференциального уравнения. Если дополнительно еще заданы начальные условия, то требуется выделить частное решение или частный интеграл, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Задания для самостоятельной работы

В следующих задачах показать, что данные функции являются решениями указанных дифференциальных уравнений:

1. $y = \dfrac{\sin x}{x}, \quad xy' + y = \cos x.$

2. $arctg\frac{y}{x}-\ln\left(C\sqrt{x^2+y^2}\right)=0, \quad (y+x)dx-(x-y)dy=0.$

3. $y=e^{\arcsin Cx}, \quad xy'=ytg\ln y.$

4. $y=e^x\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt+C\right), \quad y'-y=e^{x+x^2}.$

5. $x=y\int\limits_0^x \sin t^2 dt, \quad y=xy'+y^2\sin x^2.$

6. $y=x\left(\int\frac{e^x}{x}dx+C\right), \quad xy'-y=xe^x.$

7. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad x+yy'=0.$

8. $\begin{cases} x=\ln t+\sin t, \\ y=t(1+\sin t)+\cos t, \end{cases} \quad x=\ln y'+\sin y'.$

9. $\begin{cases} x=e^{arctgt}, \\ y=e^{-arctgt}, \end{cases} \quad y-xy'=0.$

10. $\begin{cases} x=t^2+e^t, \\ y=\frac{2}{3}t^3+(t-1)e^t, \end{cases} \quad y'^2+e^{y'}=x.$

1.2. Существование и единственность решения

1. *Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка (Теорема Пикара).* Пусть в прямоугольнике $\Pi=\{(x,y)\in R^2 / |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$ функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны. Тогда на некотором отрезке $x_0-d\le x\le x_0+d$ существует единственное решение уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

При этом можно взять $d=\min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}$, где M - наибольшее значение функции $f(x,y)$ в прямоугольнике Π.

Замечание 1. Требование непрерывности функции $f'_y(x,y)$ можно заменить требованием ее ограниченности или условием Липшица по второй переменной y:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|, \quad \forall(x,y_i)\in\Pi, \quad i=1,2,$$

при этом $L=const$ - называют постоянной Липшица.

Заметим, что из непрерывности функции $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике следует ее ограниченность, а из последнего – условие Липшица.

В самом деле, если $f'_y(x,y)$ ограничена в прямоугольнике Π, то найдется такое L, что для всех $(x,y)\in\Pi$ выполнено неравенство $|f'_y(x,y)|\le L$.

По теореме Лагранжа для любых пар $(x,y_1),(x,y_2)\in\Pi$ имеет место равенство $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|f'_y(x,\eta)||y_1-y_2|$, где $y_1<\eta<y_2$. Откуда с учетом ограниченности $f'_y(x,y)$, получаем условие Липшица

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|.$$

Понятно, что в общем случае из условия Липшица не следует ограниченность $f'_y(x,y)$. Например, функция $f(x,y)=|y|$ удовлетворяет условию Липшица (в силу свойства модуля $\big||y_1|-|y_2|\big|\le|y_1-y_2|$) в любом прямоугольнике, но, однако, ее частная производная $f'_y(x,y)$ не существует в точках вида $(x_0,0)$.

Замечание 2. Для существования решения уравнения $y'=f(x,y)$ достаточно только непрерывности функции $f(x,y)$ в прямоугольнике Π, но при этом решение может не быть единственным *(Теорема Пеано).*

Последовательные приближения, определяемые формулами

$$y_0(x)=y_0,\quad y_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(s,y_{k-1}(s)\right)ds,\quad k=1,2,\ldots,$$

равномерно сходятся к решению задачи Коши на отрезке $[x_0-d,\ x_0+d]$. Во многих случаях это решение существует не только на указанном отрезке, но и на большем.

Оценка погрешности, получаемой при замене точного решения k-м приближением $y_k(x)$, выражается неравенством

$$|y(x)-y_k(x)|\le\frac{M\cdot L^{k-1}\cdot d^k}{k!},$$

где $M=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|,\ \ L=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f'_y(x,y)|,\ \ d=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$.

Пример 3. Для уравнения $y'=x-y^2$ с начальным условием $y(0)=0$ построить третье последовательное приближение и оценить его ошибку при $-0{,}5\le x\le0{,}5$.

Решение. Функции $f(x,y)=x-y^2$, $f'_y(x,y)=-2y$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi=\{(x,y)\in R^2/|x|\le1,\ |y|\le1\}$. Поэтому $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f'_y(x,y)|=2$. Так как $M=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|=2$, то $d=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}=\min\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, на отрезке $-0{,}5 \le x \le 0{,}5$ последовательные приближения к решению задачи Коши сходятся равномерно.

Последовательные приближения вычисляем по формуле

$$y_0(x) = 0, \quad y_k(x) = \int_0^x \left(s - y_{k-1}^2(s)\right)ds, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Имеем:

$$y_1(x) = \int_0^x (s - 0)ds = \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(s - \frac{s^4}{4}\right)ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(s - \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^5}{20}\right)^2\right)ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Теперь оценим разность между точным решением и найденным третьим приближением:

$$\left|y(x) - y_3(x)\right| \le \frac{M \cdot L^2 \cdot d^3}{3!} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $y_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}$; $\frac{1}{6}$.

Пример 4. Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши $y' = y - x$, $y(0) = 3$.

Решение. Последовательные приближения к решению данной задачи зададим по рекуррентной формуле

$$y_0(x) = 3, \quad y_k(x) = 3 + \int_0^x \left(y_{k-1}(s) - s\right)ds, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{1}$$

Подставляя в (1) последовательно $k = 1,2,3,\ldots$, найдем функции:

$$y_1(x) = 3 + \int_0^x (3 - s)ds = 3 + 3x - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 3 + \int_0^x \left(3 + 3s - \frac{s^2}{2} - s\right)ds = 3 + 3x + x^2 - \frac{x^3}{3!},$$

$$y_3(x)=3+\int_0^x\left(3+3s+s^2-\frac{s^3}{3!}-s\right)ds=3+3x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4!},$$

$$y_4(x)=3+\int_0^x\left(3+3s+s^2+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{4!}-s\right)ds=3+3x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}-\frac{x^4}{4!},$$

....

$$y_k(x)=3+\int_0^x\left(3+3s+s^2+\frac{s^3}{3}+\frac{s^4}{3\cdot 4}+\dots+\frac{s^{k-1}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(k-1)}-\frac{s^k}{k!}-s\right)ds=$$

$$=3+3x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots+\frac{x^k}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Представим $y_k(x)$ в виде

$$y_k(x)=x+1+2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^k}{k!}\right)-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

и, переходя к пределу при $k\to+\infty$, найдем решение задачи Коши

$$y(x)=\lim_{k\to+\infty}y_k(x)=\lim_{k\to+\infty}\left(x+1+2\sum_{m=0}^{k}\frac{x^m}{m!}-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)=x+1+2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}=x+1+2e^x.$$

Ответ: $y(x)=x+1+2e^x$.

Пример 5. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение уравнения $y'=x+y^3$ с начальным условием $y(0)=0$.

Решение. В любом квадрате

$$\Pi=\{(x,y)\in R^2\,/\,|x|\le a,\ |y|\le a\}$$

функции $f(x,y)=x+y^3$ и $f'_y(x,y)=3y^2$ непрерывны, т.е. выполняются условия теоремы Пикара. Тогда решение заданной задачи Коши существует на отрезке $-d\le x\le d$, $d=\min\left\{a,\ \frac{a}{M}\right\}$, где $M=\max_{(x,y)\in\Pi}|x+y^3|$. Положим $a=1$. Тогда, очевидно, что $M=2$, а $d=\frac{1}{2}$.

Ответ: $[-0{,}5;\ 0{,}5]$.

Пример 6. Выделить область на плоскости x,y, в которой через каждую точку проходит единственное решение уравнения $y'=\frac{2y}{2x-3}+\sqrt{6x-y^2-x^2-5}$.

Решение. Функция

$$f(x,y)=\frac{2y}{2x-3}+\sqrt{6x-y^2-x^2-5}$$

определена и непрерывна для всех x, y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 2x-3\neq 0, \\ 6x-y^2-x^2-5\geq 0. \end{cases}$$

Второе неравенство системы равносильно неравенству

$$(x-3)^2+y^2\leq 4,$$

задающему круг с центром в точке $(3,0)$ радиуса 2.

Функция

$$f'_y(x,y)=\frac{2}{2x-3}-\frac{y}{\sqrt{6x-y^2-x^2-5}}$$

непрерывна в каждой точке, удовлетворяющей системе

$$\begin{cases} 2x-3\neq 0, \\ 6x-y^2-x^2-5> 0. \end{cases}$$

Следовательно, по теореме Пикара, через каждую точку области $\{(x,y)\in R^2 / y^2+(x-3)^2<1,\ \ x\neq 3/2\}$ проходит единственная интегральная кривая.

Ответ: $\{(x,y)\in R^2 / y^2+(x-3)^2<1,\ \ x\neq 3/2\}$.

Пример 7. Найти все решения задачи Коши $y'=3\sqrt[3]{y^2}$, $y(0)=0$, определенные на промежутке $[0,+\infty)$.

Решение. Очевидно, что $y=0$ является решением задачи Коши. Функция $f(x,y)=3\sqrt[3]{y^2}$ непрерывна в любой окрестности начала координат плоскости x, y, а функция $f'_y(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ - не ограничена в любой достаточно малой окрестности точки $(0,0)$. Поэтому данная задача Коши может иметь более одного решения. При $y\neq 0$, разделяя переменные в уравнении $y'=3\sqrt[3]{y^2}$ и интегрируя, получим

$$y^{\frac{-2}{3}}dy=3dx,\quad \frac{1}{3}y^{\frac{-2}{3}}dy=dx,\quad \frac{1}{3}\int y^{\frac{-2}{3}}dy=\int dx+C,$$

$$y^{\frac{1}{3}}=x+C,\quad y=(x+C)^3.$$

Из полученного семейства через начало координат проходит только одна интегральная кривая $y = x^3$.

При любом $x_0 > 0$ составная функция

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_0, \\ (x - x_0)^3, & x > x_0 \end{cases}$$

является решением задачи Коши, так как она проходит через начало координат, на промежутке $[0,+\infty)$ имеет производную и удовлетворяет уравнению $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

Таким образом, данная задача Коши имеет бесконечное множество решений.

Ответ: $y = 0$, $y = x^3$, $y = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_0, \\ (x - x_0)^3, & x > x_0, \end{cases}$ $\quad x_0 > 0$.

2. *Продолжение решений.* Если уравнение $y' = f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы существования в замкнутой ограниченной области, то всякое решение можно продолжить до выхода на границу этой области.

Если функция $f(x, y)$ в области $\alpha < x < \beta,\ |y| < \infty$ (α и β могут быть конечными или бесконечными) непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y)| \le p(x)|y| + q(x),$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны, то любое решение уравнения можно продолжить на весь интервал $\alpha < x < \beta$.

Пример 8. Для уравнения $y' = x^3 - y^3$ доказать, что решение с произвольным начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \le x < +\infty$.

Решение. Так как функции $f(x, y) = x^3 - y^3$, $f'_y(x, y) = -3y^2$ непрерывны при всех x, y, то через каждую точку плоскости проходит одна интегральная кривая заданного уравнения.

В области $D_1 = \{(x, y) \in R^2 / x < y\}$ все решения убывают ($y' = x^3 - y^3 < 0$), поэтому они достигают прямой $y = x$ и переходят в область $D_2 = \{(x, y) \in R^2 / x > y\}$, в которой все решения возрастают. При этом ни одна интегральная кривая не может выйти из D_2, поскольку для этого ей пришлось бы пересечь прямую $y = x$, на которой $y' = 0$.

Следовательно, ни одна кривая в D_2 не имеет вертикальных асимптот, т.е. она продолжима на полуинтервал $[x_0,+\infty)$.

Пример 9. Имеет ли уравнение $y' = y^2 + 1$ продолжаемые решения на бесконечный интервал?

Решение. Все решения заданного уравнения задаются формулой $y = tg(x + C)$, поэтому каждое из них существует только на интервале длины π и при приближении к его концам стремится к $-\infty$ или $+\infty$. Такие решения не могут быть продолжены несмотря на то, что правая часть заданного уравнения удовлетворяет теореме существования и единственности в любом прямоугольнике.

3. *Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $n-$го порядка.* Пусть в области D функция $f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ и ее частные производные первого порядка по $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ непрерывны. Тогда задача Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Пример 10. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости x, y касаться друг друга в некоторой точке $(x_0,\ y_0)$:

а) для уравнения $y' = x + y^2$?

б) для уравнения $y'' = x + y^2$?

в) для уравнения $y''' = x + y^2$?

Решение. а) Так как функция $f(x, y) = x + y^2$ непрерывна вместе со своей частной производной $f'_y(x, y) = 2y$ на всей плоскости x, y, то, согласно теореме Пикара, в любой конечной части плоскости x, y проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = x + y^2$. Поэтому касание двух различных интегральных кривых невозможно.

б) Касание двух решений y_1, y_2 уравнения $y'' = x + y^2$ в точке $(x_0,\ y_0)$ означает выполнение равенств $y_1(x_0) = y_2(x_0),\ y'_1(x_0) = y'_2(x_0)$.

Из непрерывности функции $f(x,y)=x+y^2$ и ее частных производных $f'_y(x,y)=2y$, $f'_{y'}(x,y)=0$, в силу теоремы Пикара, задача Коши

$$y''=x+y^2,\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0$$

имеет единственное решение. Следовательно, различные интегральные кривые рассматриваемого уравнения не могут касаться.

в) В этом случае, на основании теоремы Пикара, могут касаться решения y_1 и y_2 следующих задач Коши:

$$y'''=x+y^2,\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ y''(x_0)=y''_0,$$

$$y'''=x+y^2,\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ y''(x_0)=y''_{01},$$

где $y''_0\neq y''_{01}$.

Ответ: а) нет, б) нет, в) да.

Пример 11. При каких n уравнение $y^{(n)}=f(x,y)$ (f, f'_y - непрерывны на всей плоскости x,y) может иметь среди своих решений две функции $y_1=x,\ y_2=x+x^4$?

Решение. Очевидно, что n не может равняться единице, поскольку через точку $(0,0)$ проходит два различных решения. Далее, $n\neq 2$, так как в противном случае заданные функции были бы решениями задачи Коши

$$y''=f(x,y),\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

Аналогично устанавливается, что $n\neq 3$, $n\neq 4$.

Для случая $n=5$ задача Коши

$$y^{(V)}=f(x,y),\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=y'''(0)=y^{(IV)}(0)=0$$

может иметь решение $y_1=x$, а задача

$$y^{(V)}=f(x,y),\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=y'''(0)=0,\ y^{(IV)}(0)=24$$

- решение $y_2=x+x^4$. Для $n>5$ проводятся аналогичные рассуждения.

В качестве искомого уравнения можно взять $y^{(n)}=0,\ n\geq 5$.

Ответ: $n\geq 5$.

Задания для самостоятельной работы

11. Проверить, удовлетворяют ли функции

$$f(x,y)=y^2\sin x+e^x,\quad f(x,y)=\begin{cases} y\ln|y|, & y\neq 0,\\ 0, & y=0\end{cases}$$

условию Липшица по переменной y в полосе $D=\{(x,y)\in R^2 / x\in R, |y|\le b\}$?

12. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данного уравнения с данными начальными условиями:

а) $y'=x-y^2,\quad y(0)=0$, б) $y'=3x^2+y^2-1,\quad y(1)=1$,

в) $y'=y+e^{y-1},\quad y(0)=1$, г) $y'=1+x\sin y,\quad y(\pi)=2\pi$.

13. Для уравнения $y'=1-(1+x)y+y^2$ с начальным условием $y(0)=1$ построить второе приближение к решению и оценить его ошибку при $-0{,}25\le x\le 0{,}25$.

14. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение задачи Коши $y'=2y^2-x,\quad y(1)=1$.

15. Пользуясь каким-либо достаточным условием единственности, выделить области на плоскости x,y, в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения

а) $y'=2xy+y^2$, б) $y'=2+\sqrt[3]{y-2x}$, в) $(x-2)y'=\sqrt{y}-x$,

г) $y'=1+tgy$, д) $(y-x)y'=y\ln x$, е) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.

16. Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши $y'=x+y,\quad y(0)=1$.

17. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости x,y пересекаться в некоторой точке $(x_0,\ y_0)$:

а) для уравнения $y'=x+y^2$?

б) для уравнения $y''=x+y^2$?

18. Сколько существует решений уравнения $y^{(n)}=x+y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям: $y(0)=1, y'(0)=2$? Рассмотреть отдельно случаи $n=1,2,3$.

19. Сколько решений уравнения $y^{(n)} = f(x,y)$ (f и f'_y непрерывны на всей плоскости x, y) проходит через точку $(x_0,\ y_0)$ по заданному направлению, образующему угол α с осью Ox? Рассмотреть случаи $n = 1,2$ и $n \geq 3$.

20. При каких n уравнение $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений функции $y = x$, $y = \sin x$?

21. Для уравнения $y' = xy + e^{-y}$ доказать, что решение с произвольным начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leq x < +\infty$.

22. При каких a каждое решение заданного уравнения продолжается на бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$

а) для уравнения $y' = |y|^a$?

б) для уравнения $y' = \left(y^2 + e^x\right)^a$?

в) для уравнения $y' = |y|^{a-1} + \left|x\sqrt[3]{y}\right|^{2a}$?

1.3. Изоклины. Составление дифференциального уравнения семейства кривых

1. *Изоклины.* Если каждой точке области $D \subset R^2$ ставится в соответствие прямая, проходящая через эту точку, то говорят, что в этой области задано *поле направлений*.

Для каждой точки (x,y) из области D, где определена функция $f(x,y)$, уравнение $y' = f(x,y)$ определяет значение производной решения, проходящего через эту точку (т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в этой точке). Таким образом, дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ задает в области D поле направлений.

Метод изоклин помогает построить поле направлений. *Изоклиной* называется геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют одно и то же направление, т.е. определяется уравнением $f(x,y) = k,\ \ k = const$. Для нескольких k из множества значений функции $f(x,y)$ рисуем достаточно густую сеть изоклин. Через многие точки каждой изоклины $f(x,y) = k$

проводим короткие отрезки под углом α ($tg\alpha = k$) к оси Ox. По этому полю направлений приближенно строим интегральные кривые.

Пример 12. Дано дифференциальное уравнение $y' = x^2$. Построить поле направлений. Методом изоклин построить приближенно графики интегральных кривых. Сравнить их с точными интегральными кривыми.

Решение. Функции $f(x,y) = x^2$, $f'_y(x,y) = 0$ непрерывны в каждой точке плоскости Oxy. Поэтому, в силу теоремы существования и единственности, через каждую точку проходит единственная интегральная кривая и различные интегральные кривые не пересекаются.

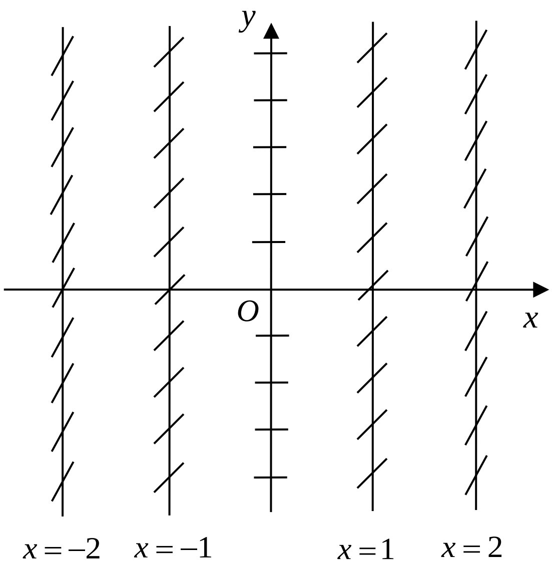

Рис.1

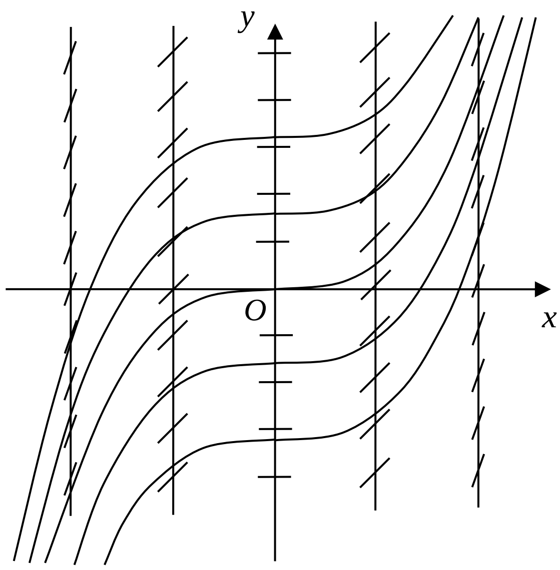

Рис.2

Уравнения изоклин имеют вид $x^2 = k,\ k \ge 0$ или $x = \pm\sqrt{k}$. Изоклинами являются прямые параллельные оси Oy. При $k = 0$ получим изоклину $x = 0$, через несколько точек которой проводим короткие горизонтальные отрезки, так как $tg\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Значению $k = 1$ соответствует две прямые $x = \pm 1$, через многие точки каждой из них проведем отрезки, образующие с осью Ox угол $\alpha = 45^0$. Аналогично, при $k = 4$ получаем прямые $x = \pm 2$, для которых $\alpha = acrtg4$. В результате получили поле направлений (рис.1). Построим теперь интегральные кривые, которые в каждой точке касаются поля направления (рис.2). Полученные кривые напоминают кубические параболы. Точные интегральные кривые имеют вид $y = \frac{x^3}{3} + C$.

2. *Составление дифференциальных уравнений семейств линий.* Для того, чтобы восстановить дифференциальное уравнение по заданному общему интегралу

$$\Phi\left(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n\right) = 0, \tag{1}$$

необходимо продифференцировать по x равенство (1) n раз, считая y функцией от x и из системы

$$\begin{cases} \Phi\left(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} y' + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} y'^2 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y'' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y^{(n)} = 0, \end{cases}$$

исключить произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пример 13. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = C_1 x^2 + C_2 e^x. \tag{2}$$

Решение. Так как уравнение семейства (2) содержит две постоянные, дифференцируем его два раза:

$$y' = 2C_1 x + C_2 e^x, \tag{3}$$

$$y'' = 2C_1 + C_2 e^x. \tag{4}$$

Исключаем C_1. Из уравнения (4) имеем $C_1 = \frac{y'' - C_2 e^x}{2}$; подставляя это в (3), получим $y' = xy'' - C_2 x e^x + C_2 e^x$. Исключая из последнего равенства C_2, будем иметь $C_2 = \frac{y' - xy''}{e^x (1 - x)}$. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в (2), получим после упрощений дифференциальное уравнение

$$(x^2 - 2x) y'' + (2 - x^2) y' + 2(x - 1) y = 0.$$

3. *Изогональные и ортогональные траектории.* Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда углом между этими кривыми называется угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0.

Этот угол φ можно найти из формулы

$$tg\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}. \tag{5}$$

Линии, пересекающие все кривые данного семейства под одним и тем же углом φ, называются *изогональными траекториями*. В частности, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то изогональные траектории называются *ортогональными*.

Для отыскания изогональных траекторий семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ следует сначала составить дифференциальное уравнение указанного семейства. Пусть $F(x, y, y') = 0$ - дифференциальное уравнение данного семейства. Тогда, на основании формулы (5), уравнение

$$F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0, \tag{6}$$

где $k = tg\varphi$ ($\varphi \neq \pi/2$), является дифференциальным уравнением изогональных траекторий, а уравнение

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0, \tag{7}$$

есть уравнение ортогональных траекторий. Далее, проинтегрировав уравнение (6) или (7), получим семейство изогональных или ортогональных траекторий.

Если семейство кривых $\Phi(\rho, \theta, C) = 0$ задано в полярной системе координат ρ, θ и $F(\rho, \theta, \rho') = 0$ - дифференциальное уравнение этого семейства, то изогональные траектории ($\varphi \neq \pi/2$) находятся из уравнения

$$F\left(\rho, \theta, \frac{\rho(\rho' + k\rho)}{\rho - k\rho'}\right) = 0.$$

Для отыскания ортогональных траекторий следует проинтегрировать уравнение

$$F\left(\rho,\theta,-\frac{\rho^2}{\rho'}\right)=0.$$

Пример 14. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства линий $(2C-x)y^2=x^3$.

Решение. Исключая постоянную C из системы

$$\begin{cases}(2C-x)y^2-x^3=0,\\ -y^2+2(2C-x)yy'-3x^2=0,\end{cases}$$

найдем дифференциальное уравнение данного семейства:

$$2x^3y'-3x^2y-y^3=0.$$

Заменяя в этом уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$2x^3\frac{1}{y'}+3x^2y+y^3=0.$$

Ответ: $(3x^2y+y^3)y'+2x^3=0$.

Пример 15. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства линий $\rho^2=C\sin\theta$.

Решение. Из системы

$$\begin{cases}\rho^2=C\sin\theta,\\ 2\rho\rho'=C\cos\theta\end{cases}$$

получим дифференциальное уравнение данного семейства: $\rho'=\frac{\rho}{2}ctg\theta$.

Заменяя в этом уравнении ρ' на $-\frac{\rho^2}{\rho'}$, найдем дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $-\frac{\rho^2}{\rho'}=\frac{\rho}{2}ctg\theta$.

Ответ: $\rho'=-2\rho\cdot tg\theta$.

Пример 16. Составить дифференциальное уравнение изогональных траекторий, пересекающих линии семейства $y^2 + Cx = x^3$ под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Аналогично проделанному выше, имеем

$$\begin{cases} y^2 + Cx = x^3, \\ 2yy' + C = 3x^2, \end{cases}$$

откуда найдем дифференциальное уравнение данного семейства:

$$y^2 + 2x^3 - 2xyy' = 0.$$

После замены в последнем уравнении y' на $\frac{y'-1}{1+y'}$ ($tg\frac{\pi}{4} = 1$), получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий

$$y^2 + 2x^3 - 2xy\frac{y'-1}{1+y'} = 0.$$

Ответ: $\left(y^2 + 2x^3 - 2xy\right)y' + y^2 + 2x^3 + 2xy = 0$.

Пример 17. Составить дифференциальное уравнение изогональных траекторий, пересекающих линии семейства $\rho = C(1+\cos\theta)$ под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Исключив параметр C из системы

$$\begin{cases} \rho = C(1+\cos\theta), \\ \rho' = -C\sin\theta, \end{cases}$$

получим дифференциальное уравнение данного семейства:

$$(1+\cos\theta)\rho' + \rho\sin\theta = 0.$$

Заменив здесь ρ' на $\rho\frac{\rho'+\rho}{\rho-\rho'}$, найдем дифференциальное уравнение изогональных траекторий:

$$(1+\cos\theta)\rho\frac{\rho'+\rho}{\rho-\rho'} + \rho\sin\theta = 0,$$

или

$$(1+\cos\theta-\sin\theta)\rho' + \rho(1+\cos\theta+\sin\theta) = 0.$$

Ответ: $\rho' = -\frac{\rho(1+\cos\theta+\sin\theta)}{1+\cos\theta-\sin\theta}$.

Задания для самостоятельной работы

23. С помощью метода изоклин приближенно построить некоторые интегральные кривые данных уравнений

а) $y' = x^2 + y^2$, б) $y' = -x + y$, в) $y' = 2x - y$, г) $y' = x + 1$,

д) $y' = x^2 - y^2$, е) $y' = 2 - y$, ж) $y' = 1 - x$, з) $y' = x^2 + y$.

24. Составить дифференциальные уравнения данных семейств линий

а) $x^2 + Cy^2 = 2y$, б) $Cy = \sin Cx$,

в) $(x - C_1)^2 + C_2 y^2 = 1$, г) $\ln y = C_1 x + C_2 y$,

д) $y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x$, е) $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

25. Составить дифференциальное уравнение всех окружностей на плоскости.

26. Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

27. Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной оси Oy, касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

В задачах 28-35 составить дифференциальные уравнения ортогональных траекторий данных семейств линий.

28. $y = Cx^2$. 29. $y = Cx^4$.

30. $y^2 = x + C$. 31. $x^2 = y + Cx$.

32. $x^2 + C^2 = 2Cy$. 33. $\rho^2 = C\cos 2\theta$.

34. $\rho = C(1 + \cos\theta)$. 35. $\rho^2 = \ln tg\theta + C$.

В задачах 36-40 составить дифференциальные уравнения траекторий, пересекающих линии данного семейства под данным углом φ:

36. $x^2 + y^2 = C^2$, $\varphi = 45^0$.

37. $y = Cx$, $\varphi = 60^0$.

38. $y^2 = 2Cx$, $\varphi = 60^0$.

39. $\rho = C\sin\theta$, $\varphi = 45^0$.

40. $y = x\ln x + Cx$, $\varphi = arctg 2$.

1.4. Контрольная работа

Вариант 1.

1. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y = x^2 + Cx$.

2. С помощью метода изоклин приближенно построить интегральные кривые уравнения $y' = y - x^2 - 2x - 2$.

3. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства линий $y = C\sin x - 2$.

4. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0, \quad y_n(x) = x + 2\int_0^x \cos(x-t)\, y_{n-1}(t)\,dt, \quad n = 1,2,3,\dots$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

5. Пусть функция $y(x)$ при $x \geq 0$ является решением задачи Коши $y' = 1 + x + 100\sin y$, $y(0) = 0$. Доказать, что $y(x) > 0$ для всех $x > 0$.

Вариант 2.

1. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y = tg(x + C)$.

2. С помощью метода изоклин приближенно построить интегральные кривые уравнения $y' = y - x^2 + 2x$.

3. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства линий $y = C\cos x + 2$.

4. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0, \quad y_n(x) = 5\cos x - 4 + 2\int_0^x \left(1 - e^{t-x}\right) y_{n-1}(t)\,dt, \quad n = 1,2,3,\dots$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

5. Функция $y(x)$ при $x \geq 0$ удовлетворяет уравнению $y' = 2 + x^2 + \sin^3 y$ и начальному условию $y(0) = 0$. Доказать, что $y(x) > 0$ для всех $x > 0$.

Вариант 3.

1. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $Cy = tg(Cx)$.

2. С помощью метода изоклин приближенно построить интегральные кривые уравнения $y' = 4x + 4y + 2$.

3. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства линий $y^2 = Ce^{x^2+y^2}$.

4. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0, \quad y_n(x) = 4 + 5\int_0^x \sin(x-t) y_{n-1}(t)dt, \quad n = 1,2,3,\dots$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

5. Функция $y(x)$ при $x \geq 0$ удовлетворяет уравнению $y' = x + \cos y$. Имеет ли $y(x)$ асимптоту при $x \to +\infty$?

Вариант 4.

1. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $(y - C)^2 = 2x$.

2. С помощью метода изоклин приближенно построить интегральные кривые уравнения $y' = 4x - 4y + 2$.

3. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства линий $y^2 = Ce^{-(x+y)}$.

4. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0, \quad y_n(x) = 5(\cos x + \sin x) + \int_0^x [1 + 2(x-t)] y_{n-1}(t)dt, \quad n = 1,2,3,\dots$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

5. Функция $y(x)$ при $x \geq 0$ удовлетворяет уравнению $y' = x + \dfrac{1}{1+y^2}$. Существует ли у функции $y(x)$ конечный предел при $x \to +\infty$?

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1. Уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{1}$$

где M, N - заданные непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением с *разделенными переменными*.

На основании равенства

$$d\left(\int M(x)dx + \int N(y)dy\right) = M(x)dx + N(y)dy,$$

имеем

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Полученное равенство является *общим интегралом* уравнения (1).

2. Уравнение вида

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \tag{2}$$

где M_1, M_2, N_1, N_2- заданные непрерывные функции, называется дифференциальным *уравнением с разделяющимися переменными*.

Разделив обе части уравнения (2) на произведение $M_2(y) \cdot N_1(x)$, получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

с разделенными переменными, а значит, общий интеграл записывается в виде

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C. \tag{3}$$

Заметим, что при делении обеих частей уравнения (2) на $M_2(y) \cdot N_1(x)$ могут быть потеряны решения, обращающие в нуль это выражение. Если эти решения не входят в общий интеграл (3), то они являются особыми решениями уравнения (2).

Пример 18. Решить уравнение $xydx+(x+1)dy=0$.

Решение. Разделим обе части данного уравнения на $y(x+1)$:

$$\frac{x}{x+1}dx+\frac{dy}{y}=0,$$

и проинтегрируем

$$\ln|y|=\ln|x+1|-x+\ln|C|,\quad C\neq 0,$$

$$|y|=C|x+1|e^{-x},\quad C\neq 0,$$

или

$$y=C(x+1)e^{-x},\quad C\in R.$$

Заметим, что при $C=0$ получаем решение $y=0$, которое было потеряно при делении на y. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x=-1$ удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $y=C(x+1)e^{-x}$, $x=-1$.

3. Уравнение $y'=f(x)\cdot g(y)$ сводится к уравнению (1). Для этого достаточно положить $y'=\frac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

Пример 19. Решить уравнение $y'ctgx+y=2$.

*Решение***.** Функции вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ не удовлетворяют уравнению, поэтому запишем его в виде $y'=(2-y)\cdot tgx$. Функция $y=2$ является решением уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные в уравнении и проинтегрировав его:

$$\frac{dy}{y-2}=-tgxdx,\qquad \int\frac{dy}{y-2}=\int\frac{d\cos x}{\cos x},$$

$$\ln|y-2|=\ln|\cos x|+\ln|C|,\quad C\neq 0,$$

$$y=C\cos x+2,\quad C\neq 0.$$

Учитывая, что ранее найденное решение $y=2$ можно получить из последнего при $C=0$, записываем

Ответ: $y=C\cos x+2$.

4. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(ax+by+c),$$

где a,b,c - постоянные, заменой переменных $z=ax+by+c$ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 20. Решить уравнение $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.

Решение. Приведем данное уравнение с помощью замены $z=4x+2y-1$ к уравнению с разделяющимися переменными.

Имеем $z'=4+2y'$, $\frac{dz}{dx}=4+2\sqrt{z}$. Положим $\sqrt{z}=t$. Тогда $\frac{2tdt}{dx}=4+2t$, $\frac{tdt}{2+t}=dx$,

$t-2\ln(t+2)=x+C$, $\sqrt{z}-2\ln\left(\sqrt{z}+2\right)=x+C$. Возвращаясь к исходным переменным, записываем

Ответ: $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right)=x+C$.

5. *Геометрические и физические задачи, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.*

Для решения геометрических задач целесообразно построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y=y(x)$ (если задача решается в прямоугольных координатах) и выразить все упоминаемые в задаче величины через x,y и y'. Тогда из данного в условии задачи соотношения получаем дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y(x)$.

Пример 21. Найти такую кривую, проходящую через точку $(0,-2)$, чтобы тангенс угла наклона касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на 3 единицы.

Решение. Обозначим искомую кривую через $y=y(x)$. Исходя из геометрического смысла первой производной, дифференциальное уравнение семейства кривых, удовлетворяющих требуемому в задаче свойству, имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=y+3.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение

$$\ln|y+3|=x+C,$$

или

$$y = Ce^x - 3.$$

Так как искомая кривая обладает свойством $y(0) = -2$, то из общего решения определим значение C, соответствующее этой кривой: $-2 = Ce^0 - 3$, т.е. $C = 1$, поэтому $y = e^x - 3$.

Ответ: $y = e^x - 3$.

При составлении дифференциального уравнения, описывающего физический процесс, надо прежде всего решить, какую из величин взять за независимую переменную, а какую – за искомую функцию. Затем надо выразить, на сколько изменится искомая функция y, когда независимая переменная x получит приращение Δx, т.е. выразить разность $y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию.

В некоторых задачах при составлении дифференциального уравнения следует использовать физические законы и воспользоваться физическим смыслом производной.

Пример 22. В сосуд, содержащий 10 *л* воды, непрерывно поступает со скоростью 2 *л* в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 *кг* соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение. Примем за независимую переменную время t, а за искомую функцию $y(t)$ - количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. В одну минуту поступает 2 *л* раствора, а в Δt минут - $2\Delta t$ литров; в этих $2\Delta t$ литрах содержится $0{,}3 \cdot 2\Delta t = 0{,}6\Delta t$ *кг* соли. С другой стороны, за время Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ литров раствора. В момент t во всем сосуде (10 *л*) содержится $y(t)$ *кг* соли, следовательно, в $2\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0{,}2\Delta t \cdot y(t)$ *кг* соли, если бы за время Δt содержание соли в сосуде не менялось. Но так как оно за это время меняется на бесконечно малую величину при $\Delta t \to 0$, то в вытекающих $2\Delta t$ литрах содержится $0{,}2\Delta t(y(t) + \alpha)$ *кг* соли, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Итак, в растворе, втекающем за промежуток времени $(t,\ t+\Delta t)$, содержится $0{,}6\Delta t$ *кг* соли, а в вытекающем - $0{,}2\Delta t(y(t)+\alpha)$ *кг*. Приращение количества соли за это время $y(t+\Delta t)-y(t)$ равно разности найденных величин, т.е.

$$y(t+\Delta t)-y(t)=0{,}6\Delta t-0{,}2\Delta t(y(t)+\alpha).$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$. В левой части получится производная $y'(t)$, а в правой части получим $0{,}6-0{,}2y(t)$, так как $\alpha\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

Следовательно, имеем дифференциальное уравнение $y'(t)=0{,}6-0{,}2y(t)$. Решая его, получим

$$y(t)=3-Ce^{-0{,}2t}.$$

Для определения постоянной C используем условие $y(0)=0$, поскольку при $t=0$ соли в сосуде не было. Получаем $C=3$, вследствие чего функция $y(t)=3-3e^{-0{,}2t}$ есть решение поставленной задачи. При $t=5$ в сосуде будет

$$y(5)=3-3e^{-0{,}2\cdot 5}=3-3e^{-1}\approx 1{,}9 \text{ кг соли.}$$

Ответ: $3-3e^{-1}\approx 1{,}9$ *кг* соли.

Пример 23. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 2 м/с, а ее скорость через 4 с равна 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 0,25 м/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

Решение. Пусть $v=v(t)$ - скорость лодки в момент t. Тогда по условию задачи $v(0)=2$. Согласно второму закону Ньютона

$$m\frac{dv}{dt}=F(t),$$

где m - масса лодки, а $F(t)$ - сила сопротивления воды. По условию $F(t)=-kv(t)$, где $k>0$ - коэффициент пропорциональности, а знак минус означает, что сила направлена против движения. Поэтому дифференциальное уравнение движения лодки есть

$$m\frac{dv}{dt}=-kv.$$

Интегрируя это уравнение, получим $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$. Используя условие $v(0) = 2$, находим $C = 2$, поэтому $v = 2e^{-\frac{k}{m}t}$. Поскольку $v(4) = 1$ м/с, то из равенства $1 = 2e^{-\frac{4k}{m}}$ следует, что $\frac{k}{m} = \frac{\ln 2}{4}$.

Следовательно, скорость движения лодки выражается формулой $v = 2^{1-\frac{t}{4}}$. Из равенства $0{,}25 = 2^{1-\frac{T}{4}}$ находим время $T = 12$ с, через которое скорость лодки будет равна 0,25 м/с. Длину пути, пройденного лодкой, вычислим по формуле

$$s(t) = \int_0^t v(x)dx = \int_0^t 2^{1-\frac{x}{4}}dx = \frac{8}{\ln 2}\left(1 - 2^{-\frac{t}{4}}\right).$$

Отсюда видно, что лодка может пройти путь, не больший $\frac{8}{\ln 2} \approx 11{,}5$ м.

Ответ: $T = 12$ с, $\frac{8}{\ln 2} \approx 11{,}5$ м.

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие уравнения, и для каждого из них построить несколько интегральных кривых. Найти также решения, удовлетворяющие начальным условиям (в тех случаях, где указаны начальные условия).

41. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy.$
42. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1.$
43. $y' = \cos(y - x).$
44. $y' - y = 2x - 3.$
45. $xy' + y = y^2,\ y(1) = 0{,}5.$
46. $2x^2yy' + y^2 = 2.$
47. $y' = 10^{x+y}.$
48. $(x + 2y)y' = 1,\ y(0) = -1.$

49. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

50. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $2a$.

51. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

52. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении $1:2$.

В задачах 53-54 считать, что втекающий газ (или жидкость) вследствие перемешивания распределяется по всему объему вместилища равномерно.

53. Сосуд объемом в 20 *л* содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 *л* азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

54. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак непрерывно подается вода (5 *л* в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

В задачах 55-56 принять, что скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

55. Тело охладилось за 10 минут от 100^0 до 60^0. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20^0. Когда тело остынет до 25^0?

56. В сосуд, содержащий 1 *кг* воды при температуре 20^0, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 *кг*, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой 75^0. Через минуту вода нагрелась на 2^0. Когда температура воды и предмета будет отличаться одна от другой на 1^0? Потерями тепла при нагревании сосуда и прочими пренебречь.

В задачах 57-58 использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

57. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

58. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 *мг*. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

В задачах 59-61 принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g=10\,м/сек^2$ - ускорение силы тяжести, h - высота уровня воды над отверстием.

59. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром $2R=1{,}8$ *м* и высотой $H=2{,}45$ *м* через отверстие в дне диаметром $2r=6$ см? Ось цилиндра вертикальна.

60. Воронка имеет форму конуса радиуса $R=6$ *см* и высоты $H=10$ *см*, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметра 0,5 *см*, сделанное в вершине конуса?

61. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна *c*, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

2.2. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $M(x,y)$ - называется *однородной степени* p, если для любого $\lambda>0$ выполнено тождество $M(\lambda x,\lambda y)\equiv\lambda^p M(x,y)$.

Например, функция $M(x,y)=x^3+3x^2y-4xy^2+7y^3$ является однородной степени 3, так как

$M(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^3+3(\lambda x)^2\lambda y-4\lambda x(\lambda y)^2+7(\lambda y)^3=\lambda^3(x^3+3x^2y-4xy^2+7y^3)=\lambda^3M(x,y).$ Аналогично можно показать, что функции

$$\frac{x-2y}{3x+4y},\quad \frac{5x^2-xy}{x+y},\quad x^2+xy-9y^2,\quad xy^{k-1}+2x^2y^{k-2}+x^{k-2}y^2+5x^k$$

являются однородными соответственно степени $0,1,2,k$.

1. Уравнение вида

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1}$$

называется *однородным*, если функции $M(x,y),\ N(x,y)$ являются однородными одной и той же степени.

Уравнение (1) может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (2)$$

Однородные уравнения интегрируются с помощью подстановки $y = ux$, где $u = u(x)$ - новая неизвестная дифференцируемая функция.

Пример 24. Решить уравнение $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.

Решение. Так как функции $M(x, y) = y^2 - 2xy,\ N(x, y) = x^2$ являются однородными второй степени, то заданное уравнение является однородным. Полагая $y = ux$ и беря дифференциалы от обеих частей в последнем равенстве, получим $dy = udx + xdu$. Подставляя вместо y и dy их выражения в уравнение, будем иметь

$$(u^2x^2 - 2x^2u)dx + x^2(udx + xdu) = 0.$$

Разделим обе части данного уравнения на x^2 и получим уравнение с разделяющимися переменными

$$(u^2 - u)dx + xdu = 0.$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u^2 - u} = 0, \quad \int\frac{dx}{x} - \int\frac{du}{u} + \int\frac{du}{u-1} = \ln|C|,\ C \neq 0,$$

$$\ln|x| + \ln|u-1| = \ln|u| + \ln|C|, C \neq 0, \quad x(u-1) = Cu, \quad C \neq 0.$$

Возвращаясь к старым переменным, запишем

$$x\left(\frac{y}{x} - 1\right) = C\frac{y}{x}, C \neq 0, \quad x(y - x) = Cy, \quad C \neq 0.$$

При $C = 0$ получим решения $x = 0, y = x$, которые были потеряны при делении на x^2 и $u - 1$ соответственно. Поэтому общий интеграл задается формулой

$$x(y - x) = Cy,\ C \in R.$$

При делении на u, также было потерянно решение $y = 0.$

Ответ: $x(y - x) = Cy, \quad y = 0.$

Пример 25. Решить уравнение $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$.

Решение. В данном уравнении независимая переменная x не может обращаться в нуль, поэтому оно равносильно уравнению

$$y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x},$$

т.е. имеет вид (2), а значит, является однородным уравнением.

Положим $y = ux$. Тогда $dy = udx + xdu$ и последнее уравнение имеет вид

$$udx + xdu = (u + tgu)dx,$$

или $xdu = tgudx$. Интегрируя последнее уравнение, будем иметь

$$\frac{\cos udu}{\sin u} = \frac{dx}{x}, \quad \int\frac{d\sin u}{\sin u} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|,$$

$$\sin u = Cx, \quad C \neq 0.$$

Учитывая, что при делении на tgu теряется решение $y = 0$, записываем

$$\sin\frac{y}{x} = Cx, \ C \in R.$$

Ответ: $y = x\arcsin Cx$.

2. Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводится к однородному с помощью перехода к новой системе координат $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, где (x_0, y_0) - точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если же эти прямые не пересекаются, то в этом случае $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = d$ и уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = a_1x + b_1y$, поскольку оно имеет вид

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{d(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y).$$

Пример 26. Решить уравнение $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$.

*Решение***.** Данное уравнение имеет вид (1) и, так как $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, оно приводится к однородному. Точку (x_0, y_0) пересечения прямых $2x-4y+6=0$ и $x+y-3=0$ находим из системы

$$\begin{cases} 2x-4y+6=0, \\ x+y-3=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3=0, \\ x=3-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-y-2y+3=0, \\ x=3-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=1. \end{cases}$$

В данном уравнении произведем замену переменных $x=\xi+1$, $y=\eta+2$; получим уравнение

$$(2(\xi+1)-4(\eta+2)+6)d\xi+(\xi+1+\eta+2-3)d\eta=0,$$

или

$$(2\xi-4\eta)d\xi+(\xi+\eta)d\eta=0.$$

Последнее уравнение является однородным. Пологая $\eta=u\xi$, будем иметь

$$(2\xi-4u\xi)d\xi+(\xi+u\xi)(ud\xi+\xi du)=0.$$

Откуда

$$(u^2-3u+2)d\xi+\xi(1+u)du=0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{d\xi}{\xi}+\frac{(u+1)du}{u^2-3u+2}=0.$$

Интегрируя, найдем

$$\ln|\xi|+3\ln|u-2|=2\ln|u-1|+\ln|C|,\ C\neq 0,$$

$$\xi(u-2)^3=C(u-1)^2,\ C\neq 0.$$

Возвращаемся к переменным ξ, η:

$$\xi\left(\frac{\eta}{\xi}-2\right)^3=C\left(\frac{\eta}{\xi}-1\right)^2, C\neq 0,$$

$$(\eta-2\xi)^3=C(\eta-\xi)^2, C\neq 0.$$

В старых переменных последнее семейство функций имеет вид:

$$(y-2x)^3=C(y-x-1)^2, C\neq 0.$$

При $C=0$ получим решение $y=2x$, которое было потеряно при делении на $u-2$, а при делении на $u-1$ теряется решение $y=x+1$. При делении на ξ не теряется ни одно решение, поскольку $\xi=0$ порождает функцию $x=1$, которое не удовлетворяет уравнению.

Ответ: $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$, $y=x+1$.

Пример 27. Решить уравнение $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

*Решение***.** Данное уравнение имеет вид (1) и, так как $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$, то положим $z=x+y$. Тогда, имеем

$$(z+1)dx+(2z-1)(dz-dx)=0, \quad (2-z)dx+(2z-1)dz=0.$$

Разделяя переменные, получим

$$dx-\frac{2z-1}{z-2}dz=0.$$

Отсюда

$$x-2z-3\ln|z-2|=C,$$

или в исходных переменных

$$x+2y+3\ln|x+y-2|=C.$$

При делении на $z-2$ теряется решение $y=2-x$.

Ответ: $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$, $y=2-x$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения 62-69.

62. $(x+2y)dx-xdy=0.$

63. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}.$

64. $x-y-1+(y-x+2)y'=0.$

65. $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

66. $(x^2+y^2)y'=2xy.$

67. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}.$

68. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy.$

69. $(2y-x+1)dx+(4y-2x-6)dy=0.$

70. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

71. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

2.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x), \tag{1}$$

линейное относительно искомой функции и ее производной.

Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*. В противном случае уравнение (1) называется *линейным неоднородным*.

Рассмотрим два метода решения этого уравнения.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения (1) сначала проинтегрируем соответствующее линейное однородного уравнение

$$y' + P(x)\,y = 0\,. \tag{2}$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx\,, \qquad \int\frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx, \qquad \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

$$y = C\cdot e^{-\int P(x)\,dx}, \quad C \neq 0\,.$$

При $C = 0$ получаем решение $y \equiv 0$, которое было потеряно после делении на y обеих частей уравнения (2). Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C\cdot e^{-\int P(x)\,dx}, \; C \in R.$$

В последней формуле постоянную заменяем на пока неизвестную дифференцируемую функцию $C = C(x)$. Подставляя

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx} \tag{3}$$

в уравнение (1), получаем

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Отсюда

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}.$$

И, следовательно,

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (3), получаем общее решение линейного неоднородного равнения:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C_1\right). \tag{4}$$

Пример 28. Решить уравнение $y = x(y' - x\cos x)$.

Решение. Преобразуем данное уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + x\cos x. \tag{5}$$

Получили линейное неоднородное уравнение первого порядка. Сначала найдем общее решение соответствующего уравнения $y' = \frac{y}{x}$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ и интегрируя $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$, $C \neq 0$, находим общее решение $y = Cx$.

В формуле общего решения постоянную C заменяем на неизвестную (дифференцируемую) функцию $C(x)$ и подставляем выражение

$$y = C(x)x \tag{6}$$

в уравнение (5):

$$C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x}{x} + x\cos x, \quad C'(x)x = x\cos x.$$

Откуда найдем $C(x) = \sin x + C_1$. Подставляя найденную функцию в (6), получим общее решение $y = (\sin x + C_1)x$ линейного неоднородного уравнения.

Заметим, что $x = 0$ не является решением данного уравнения, поэтому его общее решение совпадет с общим решением уравнения (5).

Ответ: $y = (\sin x + C)x$.

Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять ролями искомую функцию и независимую переменную.

Пример 29. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.

Решение. Заметим, что $y = 0$ является решением уравнения. Чтобы найти остальные решения преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x}{y} - y. \qquad (7)$$

Полученное уравнение является линейным, если рассматривать x как функцию от y. Общее решение соответствующего однородного уравнения $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3x}{y}$ записывается в виде $x = Cy^3$. Подставляя выражение $x = C(y)y^3$ в уравнение (7) будем иметь

$$C'(y)y^3 + 3C(y)y^2 = \frac{3C(y)y^3}{y} - y, \qquad C'(y) = -\frac{1}{y^2}.$$

Отсюда $C(y) = \dfrac{1}{y} + C_1$, а значит, общее решение уравнения (7) имеет вид $x = y^2 + Cy^3$.

Ответ: $x = y^2 + Cy^3, y = 0$.

Метод Бернулли. Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y = u(x) \cdot \upsilon(x), \qquad (8)$$

где $u(x)$ и $\upsilon(x)$ - дифференцируемые функции.

Подставляя (8) в уравнение (1), получаем:

$$\upsilon \frac{du}{dx} + u \frac{d\upsilon}{dx} + P(x) \cdot u \cdot \upsilon = Q(x).$$

Группируя слагаемые в левой части, имеем:

$$\upsilon \frac{du}{dx} + u\left(\frac{d\upsilon}{dx} + P(x) \cdot \upsilon\right) = Q(x). \qquad (9)$$

Выберем в качестве $\upsilon(x)$ одно из ненулевых решений уравнения

$$\frac{d\upsilon}{dx} + P(x) \cdot \upsilon = 0,$$

например

$$\upsilon(x) = e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Тогда уравнение (9) принимает вид

$$e^{-\int P(x)\,dx}\frac{du}{dx}=Q(x).$$

Отсюда находим

$$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C\,.$$

Таким образом, перемножая $u(x)$ и $\upsilon(x)$, получаем общее решение уравнения (1), записанное в виде (4).

Пример 30. Решить уравнение $(2x+1)y'=4x+2y$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{2x+1}+\dfrac{4x}{2x+1}$. Положим $y=uv$. Имеем

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-\frac{2uv}{2x+1}=\frac{4x}{2x+1},$$

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}-\frac{2u}{2x+1}\right)=\frac{4x}{2x+1}. \tag{10}$$

Выберем ненулевую функцию u из уравнения

$$\frac{du}{dx}-\frac{2u}{2x+1}=0,$$

например, $u=2x+1$. Подставляя найденную функцию в (10), получим уравнение

$$(2x+1)\frac{dv}{dx}=\frac{4x}{2x+1}.$$

Откуда $dv=\dfrac{4xdx}{(2x+1)^2}$ и, следовательно, $v=\ln|2x+1|+\dfrac{1}{2x+1}+C.$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y=uv=\left(\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}+C\right)(2x+1).$$

Ответ: $y=(\ln|2x+1|+C)(2x+1)+1.$

2. Дифференциальное уравнение вида

$$y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^{\alpha},\quad \alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1. \tag{11}$$

называется *уравнением Бернулли*.

Значения 0 и 1 показателя степени α в (11) исключены, поскольку в этих случаях уравнение Бернулли становится линейным.

Заметим, что уравнение (11) при $\alpha > 0$ имеет решение $y = 0$.

Уравнение Бернулли решается либо методом Бернулли, либо сведением к линейному уравнению подстановкой.

Рассмотрим второй метод. Умножим обе части уравнения (11) на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)P(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)Q(x).$$

Полагая $z = y^{1-\alpha}$, получим линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x),$$

которое решается выше изложенным способом.

Пример 31. Решить уравнение $(x+1)\left(y' + y^2\right) = -y.$

*Решение***.** Уравнение приводится к уравнению Бернулли: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -y^2.$

Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения. Найдем остальные решения методом Бернулли.

Полагая $y = uv,$ получим уравнение

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{uv}{x+1} = -u^2v^2,$$

или

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x+1}\right) = -u^2v^2. \qquad (12)$$

Из уравнения $\frac{du}{dx} + \frac{u}{x+1} = 0$ найдем частное решение $u = \frac{1}{x+1}$ и подставим в уравнение (12):

$$\frac{1}{x+1}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{(x+1)^2}v^2,$$

откуда найдем функцию $v = v(x)$:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{x+1}, \quad v = \frac{1}{\ln|x+1| + C}.$$

Таким образом, $y = uv = \frac{1}{(\ln|x+1| + C)(x+1)}$ - общее решение.

Ответ: $y(\ln|x+1| + C)(x+1) = 1, y = 0.$

Пример 32. Решить уравнение $y' = y^4 \cos x + ytgx.$

*Решение***.** Одно из решений этого уравнения очевидно: $y = 0$. Для нахождения остальных решений сначала умножим обе части на $-3y^{-4}$:

$$-3y^{-4}y' = -3\cos x - 3y^{-3}tgx.$$

Последнее уравнение заменой $z = y^{-3}$ приводится к линейному неоднородному уравнению первого порядка

$$z' = -3ztgx - 3\cos x. \qquad (13)$$

Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $z' = -3ztgx$. Разделяя переменные

$$\frac{dz}{z} = -3tgxdx$$

и интегрируя

$$\ln|z| = 3\ln|\cos x| + \ln|C|, C \neq 0,$$

найдем общее решение $z = C\cos^3 x$.

Подставляя выражение $z = C(x)\cos^3 x$ в (13) придем к уравнению

$$C'(x)\cos^3 x = -3\cos x,$$

или

$$C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}.$$

Откуда находим функцию $C(x) = -3tgx + C_1$, следовательно, общее решение уравнения (13) имеет вид

$$z = C_1 \cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x.$$

Возвращаясь к старым переменным, записываем

Ответ: $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x}}, y = 0.$

3. Нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x),$$

где $P(x), Q(x), R(x)$ - заданные функции, называется уравнением *Риккати*.

Это уравнение в общем случае не решается в квадратурах. Если известно одно его частное решение $y = y_1(x)$, то заменой $y = y_1 + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли.

Пример 33. Решить уравнение $y' + 2y(y - x) = 1$.

Решение. Это уравнение Риккати. Нетрудно заметить, что $y = x$ является решением уравнения. Замена $y = x + z$ приводит его к уравнению Бернулли

$$z' + 2z(z + x) = 0.$$

Положив $z = uv$, будем иметь

$$u'v + uv' + 2uv(uv + x) = 0.$$

Возьмем в качестве $u = u(x)$ одно из ненулевых решений уравнения

$$u' + 2xu = 0,$$

например $u = e^{-x^2}$. Тогда $v = v(x)$ определим из уравнения

$$e^{-x^2}v' + 2e^{-2x^2}v^2 = 0, \qquad \frac{dv}{v^2} + 2e^{-x^2}dx = 0,$$

$$-\frac{1}{v} + 2\int e^{-x^2}dx = -C, \qquad v = \frac{1}{C + 2\int e^{x^2}dx}.$$

Поэтому $z = \dfrac{e^{-x^2}}{C + 2\int e^{x^2}dx}$.

Ответ: $y = x + \dfrac{e^{-x^2}}{C + 2\int e^{x^2}dx}$, $\quad y = x.$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения 72-77.

72. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$ 73. $x^2y' + xy + 1 = 0.$

74. $xydy = (y^2 + x)dx.$ 75. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$

76. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$ 77. $xy^2y' = x^2 + y^3.$

В задачах 78-81, найдя путем подбора частное решение, привести данные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их.

78. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4.$ 79. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2.$

80. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2.$ 81. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0.$

82. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

83. Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

84. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак втекает 5 *л* воды в минуту, а смесь с той же скоростью переливается в другой 100-литровый бак, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается. Когда количество соли во втором баке будет наибольшим? Чему оно равно?

2.4. Уравнение в полных дифференциалах

1. Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом от некоторой функции $U(x,y)$, т.е.

$$dU(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{2}$$

При этом для функции $U(x,y)$ выполняется равенство $dU(x,y) = 0$, на основании которого общий интеграл уравнения (1) имеет вид $U(x,y) = C$.

Для того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}. \tag{3}$$

Для нахождения функции $U(x,y)$, воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{4}$$

Интегрируя первое из этих равенств по x, найдем функцию $U(x,y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой функции $\varphi(y)$ (y считаем постоянной):

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y). \tag{5}$$

Продифференцировав последнюю функцию по y

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\left(\int M(x,y)dx\right)'_y+\varphi'(y),$$

с учетом второго равенства из (4), получим уравнение для определения функции $\varphi(y)$:

$$N(x,y)=\left(\int M(x,y)dx\right)'_y+\varphi'(y).$$

Функцию (5) можно найти также и по формуле

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy, \tag{6}$$

где (x_0,y_0) - некоторая фиксированная точка из области непрерывности функции $M(x,y),\ N(x,y)$ и их частных производных.

Пример 34. Решить уравнение $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$.

Решение. В данном случае

$$M(x,y)=\frac{3x^2+y^2}{y^2},\quad N(x,y)=-\frac{2x^3+5y}{y^3};$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-\frac{6x^2}{y^3},\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-\frac{6x^2}{y^3}.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, т.е. левая часть данного уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, для которой соблюдаются равенства

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\frac{3x^2+y^2}{y^2},\quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-\frac{2x^3+5y}{y^3}. \tag{7}$$

Из первого уравнения получим

$$U(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\varphi(y).$$

Дифференцируем последнее равенство по y и приравняем к правой части второго равенства из (7):

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-\frac{2x^3}{y^3}+\varphi'(y)=-\frac{2x^3+5y}{y^3},$$

т.е. $\varphi'(y)=-\frac{5}{y^2}$. Отсюда $\varphi(y)=\frac{5}{y}+C_1$. Поэтому $U(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\frac{5}{y}+C_1$.

Ответ: $\frac{x^3}{y^2}+x+\frac{5}{y}=C$.

Пример 35. Решить уравнение $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy$.

Решение. Так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+3x^2\ln y\right)=\frac{3x^2}{y},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{y}-2y\right)=\frac{3x^2}{y},$$

то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $U(x,y)$, используя равенства

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=3x^2+3x^2\ln y,\quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{x^3}{y}-2y.$$

Интегрируя первое равенство по x, а второе - по y, находим

$$U(x,y)=x^3+x^3\ln y+\varphi_1(y),\quad U(x,y)=x^3\ln y-y^2+\varphi_2(x).$$

Ясно, что $\varphi_1(y)=-y^2$, $\varphi_2(x)=x^3$. Поэтому $U(x,y)=x^3\ln y-y^2+x^3$.

Ответ: $x^3\ln y-y^2+x^3=C$.

Пример 36. Решить уравнение $(x\cos 2y-3)dx-x^2\sin 2ydy=0$.

*Решение***.** Так как на всей числовой оси выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\cos 2y-3)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2\sin 2y\right)=-2x\sin 2y,$$

то левая часть рассматриваемого уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$. По формуле (6), получаем

$$U(x,y)=\int_0^x(x\cos 2y-3)dx-\int_0^y 0^2\sin 2ydy=\frac{x^2}{2}\cos 2y-3x.$$

Ответ: $x^2\cos 2y-6x=C$.

2. Если условие (3) не выполняется для уравнения (1), то в некоторых случаях его можно свести к уравнению в полных дифференциалах.

Интегрирующим множителем для уравнения (1) называется такая функция $I(x,y)$ (не равная тождественно нулю), после умножения на которую уравнение (1) превращается в уравнение в полных дифференциалах.

Если $I(x,y)$- интегрирующий множитель для уравнения (1), то условие (3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(I(x,y)N(x,y)\big)\equiv\frac{\partial}{\partial y}\big(I(x,y)M(x,y)\big),$$

т.е. интегрирующий множитель является решением уравнения

$$I(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=N(x,y)\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial I(x,y)}{\partial y}. \tag{8}$$

Интегрирующий множитель легко находится из (8) в двух случаях: если $I(x,y)=I(x)$ или $I(x,y)=I(y)$; в первом случае

$$I(x)=\exp\left(\int V(x)dx\right), \tag{9}$$

где $V(x)=\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$; во втором случае

$$I(y)=\exp\left(\int W(y)dy\right), \tag{10}$$

где $W(y)=\dfrac{\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}$.

Пример 37. Решить уравнение $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0.$

*Решение***.** В этом случае

$$M(x,y)=x^2+y^2+x,\quad N(x,y)=y;$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0,$$

т.е. $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, и, значит, уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Так как отношение

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\frac{2y}{y}=2=V(x)$$

не зависит от y, то интегрирующий множитель может быть найден по формуле (9):

$$I(x)=\exp\left(\int V(x)dx\right)=\exp\left(\int 2dx\right)=Ce^{2x}.$$

В качестве интегрирующего множителя возьмем $I(x)=e^{2x}$. Умножая исходное уравнение на e^{2x}, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$e^{2x}(x^2+y^2+x)dx+ye^{2x}dy=0.$$

По формуле (6), имеем

$$U(x,y)=\int_0^x e^{2x}(x^2+x+y^2)dx+\int_0^y ye^{2\cdot 0}dy=\frac{1}{2}e^{2x}(x^2+x+y^2)\Big|_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x e^{2x}(2x+1)dx+\frac{y^2}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}(x^2+x+y^2)-\frac{y^2}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}(2x+1)\Big|_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^{2x}dx+\frac{y^2}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}(x^2+x+y^2)-\frac{1}{4}e^{2x}(2x+1)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^x=\frac{1}{2}e^{2x}(x^2+y^2).$$

Ответ: $e^{2x}(x^2+y^2)=C.$

Пример 38. Решить уравнение $x\dfrac{dy}{dx}=(3x^2\cos y-\sin y)\cos y.$

Решение. Представим уравнение в виде

$$(3x^2\cos y-\sin y)\cos y dx-xdy=0.$$

Здесь

$$M(x,y)=(3x^2\cos y-\sin y)\cos y,\quad N(x,y)=-x,$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-6x^2\cos y\sin y-\cos 2y,\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-1,$$

т.е. и в этом случае уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Так как выражение

$$\frac{\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}=\frac{2(3x^2\cos y-\sin y)\sin y}{(3x^2\cos y-\sin y)\cos y}=2tgy=W(y)$$

не зависит от x, то интегрирующий множитель найдем по формуле (10):

$$I(y)=\exp\left(\int W(y)dy\right)=\exp\left(\int 2tgydy\right)=\exp\left(\ln|C|-2\ln|\cos y|\right)=\frac{C}{\cos^2 y}.$$

Умножая исходное уравнение на $\frac{1}{\cos^2 y}$, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$(3x^2-tgy)dx-\frac{x}{\cos^2 y}dy=0.$$

Для искомой функции $U(x,y)$ имеем равенства

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=3x^2-tgy,\quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-\frac{x}{\cos^2 y},$$

из которых, находим

$$U(x,y)=x^3-xtgy+\varphi_1(y),\quad U(x,y)=-xtgy+\varphi_2(x).$$

Следовательно, $U(x,y)=x^3-xtgy+C$.

Заметим, что при делении на $\cos^2 y$ потеряны решения исходного уравнения $y=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.$

Ответ: $x^3-xtgy=C,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения 85-61.

85. $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0, y(\ln 5)=0$.

86. $(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0.$

87. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$.

88. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$.

89. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 xdy=0$.

В задачах 90-93 найти интегрирующие множители и решить их.

90. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2ydy=0.$

91. $(e^y+\sin x)dx+\cos xdy=0.$

92. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0.$

93. $y^2dx-(xy+x^3)dy=0.$

2.5. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим несколько случаев уравнений вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

1. Если уравнение (1) представимо в виде

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y))\ldots(y' - f_k(x, y)) = 0,$$

то решая все уравнения

$$y' - f_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots k,$$

можно найти решения исходного уравнения.

2. Если (1) разрешимо относительно y или x, то оно интегрируется методом введения параметра. Пусть, например, заданное уравнение записано в виде

$$y = f(x, y').$$

Введя параметр $p = \dfrac{dy}{dx} = y'$, получим

$$y = f(x, p). \tag{2}$$

Вычислим полный дифференциал $dy = \dfrac{\partial f(x, p)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f(x, p)}{\partial p}dp.$ Поскольку $dy = pdx$, то его можно представить в виде $M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0.$ Для любого решения $x = \varphi(p)$ этого уравнения, воспользовавшись равенством (2), можно получить соответствующее решение исходного уравнения в параметрической форме $x = \varphi(p), \quad y = f(\varphi(p), p)$.

Рассмотренным методом легко интегрируются, в частности, уравнения *Лагранжа*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

и *Клеро*

$$y = xy' + \psi(y').$$

Если через точку (x_0, y_0) в сколь угодно малой ее окрестности проходит более одного решения и хотя бы два из них имеют в этой точке одну и ту же производную $y'(x_0)$, то говорят, что *в такой точке нарушается единственность.*

Решение уравнения (1), состоящее из точек нарушения единственности, называют *особым*.

Если функции $F(x,y,y'), \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}, \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ непрерывны, то особое решение, если оно имеется, уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0.$$

Поэтому для отыскания особых решений необходимо из системы

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0 \end{cases}$$

исключить y'. Полученное при этом равенство $g(x,y)=0$ называется *уравнением дискриминантной кривой.* Для каждой ветви дискриминантной кривой надо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (1), и если является, то будет ли это решение особым, т.е. касаются ли его в каждой точке другие решения. Условия касания кривых $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеют вид:

$$f_1(x_0)=f_2(x_0), \quad f_1'(x_0)=f_2'(x_0).$$

Огибающей семейства кривых $\mathrm{H}(x,y,C)=0$ называется такая кривая K, в каждой своей точке касающаяся кривой семейства, отличной от кривой K в любой окрестности этой точки.

Если общий интеграл (семейство кривых) $\Phi(x,y,C)=0$ уравнения (1) имеет огибающую, то она является *особым* решением этого уравнения.

Если $\Phi(x,y,C)$ имеет непрерывные частные производные, то для отыскания огибающей надо исключить C из системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x,y,C)}{\partial C}=0 \end{cases}$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей.

Пример 39. Решить уравнение $y'^2+xy=y^2+xy'$ и выделить особые решения (если они есть).

Решение. Исследуем сначала, имеет ли уравнение особые решения. Для определения дискриминантной кривой составим систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = y'^2 + xy - y^2 - xy' = 0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 2y' - x = 0. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений y', находим дискриминантную кривую $\left(y - \dfrac{x}{2}\right)^2 = 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что найденная функция не является решением, а значит, и его особым решением. Таким образом, данное уравнение не имеет особых решений.

Теперь найдем все решения. Представим уравнение в виде $(y'-y)(y'+y-x)=0$. Полученное уравнение распадается на два $y'=y$, $y'+y=x$. Интегрируя уравнения $y'=y$, $y'=-y$, найдем: $y=Ce^x, y=Ce^{-x}$. Подставляя выражение $y=C(x)e^{-x}$ в $y'+y=x$, получим $C'(x)e^{-x}=x$, откуда

$$C(x) = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Ответ: $y=Ce^x, y=Ce^{-x}+x-1.$

Пример 40. Найти особые решения уравнения $y = 2x + 3y'^2 - 12y'$.

Решение. Из системы уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,y') = y - 2x - 3y'^2 + 12y' = 0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = -6y' + 12 = 0, \end{cases}$$

исключая y', находим дискриминантную кривую $y = 2x - 12$. Выясним, является ли функция $y = 2x - 12$ особым решением. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что она является решением. Проверим, касаются ли прямой $y = 2x - 12$ в каждой ее точке другие интегральные кривые исходного уравнения.

Для этого решим данное уравнение. Положив $p = y'$, $y = 2x + 3p^2 - 12p$, из соотношений $dy = pdx$, $dy = 2dx + (6p-12)dp$, получим $(p-2)dx = 6(p-2)dp$. Отсюда $p = 2$ или $x = 6p + C$. Поэтому решениями исходного уравнения являются функции

$$y = 2x - 12 \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 6p + C, \\ y = 2C + 3p^2. \end{cases}$$

Исключая параметр p, имеем $y = 2x - 12$, $y = 2C + \frac{(x-C)^2}{12}$. Условия касания для последних функции запишутся в виде

$$2x_0 - 12 = 2C + \frac{(x_0 - C)^2}{12}, \quad 2 = \frac{x_0 - C}{6}.$$

Из второго равенства находим $C = x_0 - 12$. Подставляя это значение C в первое уравнение, получим $2x_0 - 12 = 2x_0 - 24 + 12$. Это равенство справедливо при всех x_0. Следовательно, при каждом x_0 прямая $y = 2x - 12$ в точке с абсциссой x_0 касается одной из парабол $y = 2C + \frac{(x-C)^2}{12}$, а именно той параболы, для которой $C = x_0 - 12$.

Ответ: $y = 2x - 12$.

Пример 41. Проинтегрировать уравнение $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$.

Решение. Представим уравнение в виде $x = p\sqrt{p^2 + 1}$. Тогда

$$dx = \left(\sqrt{p^2+1} + \frac{p^2}{\sqrt{p^2+1}}\right)dp = \left(2\sqrt{p^2+1} - \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\right)dp,$$

$$dy = p\,dx = \left(2p\sqrt{p^2+1} - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)dp.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$y = \frac{2}{3}(p^2+1)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{p^2+1} + C.$$

Ответ: $x = p\sqrt{p^2+1}$, $y = \frac{2}{3}(p^2+1)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{p^2+1} + C$.

Пример 42. Проинтегрировать уравнение $y = \ln\left(1 + y'^2\right)$.

Решение. Представим уравнение в виде

$$y = \ln\left(1 + p^2\right) \qquad (3)$$

Тогда $dy = \frac{2p}{1+p^2}dp$, или

$$pdx = \frac{2p}{1+p^2}dp. \tag{4}$$

При $p=0$ из (3) получаем решение $y=0$. Найдем остальные решения, для этого разделим обе части уравнения (4) на p:

$$dx = \frac{2}{1+p^2}dp$$

и интегрируя, найдем $x = 2arctgp + C$.

Ответ: $\begin{cases} x = 2arctgp + C, \\ y = \ln(1+p^2), \end{cases}$ $\quad y = 0$.

Пример 43. Проинтегрировать уравнение $y = xy'^2 - 2y'^3$.

Решение. Это уравнение Лагранжа. Положим $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$ и запишем уравнение в виде

$$y = xp^2 - 2p^3. \tag{5}$$

Находя дифференциалы от обеих частей, приходим к уравнению $dy = p^2dx + 2xpdp - 6p^2dp$, откуда $(p^2 - p)dx + 2xpdp - 6p^2dp = 0$, т.е.

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p-1} = \frac{6p}{p-1}. \tag{6}$$

Решениями линейного однородного уравнения $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{2dp}{p-1} = 0$ являются функции

$$x = \frac{C}{(p-1)^2}.$$

Подставляя $x = \dfrac{C(p)}{(p-1)^2}$ в линейное неоднородное уравнение (6), будем иметь

$$\frac{C'(p)}{(p-1)^2} - \frac{2C(p)}{(p-1)^3} + \frac{2C(p)}{(p-1)^3} = \frac{6p}{p-1},$$

$$C'(p) = 6p^2 - 6p,$$

откуда найдем

$$C(p) = 2p^3 - 3p^2 + C + 1.$$

Поэтому

$$x=\frac{2p^3-3p^2+C+1}{(p-1)^2}=\frac{C}{(p-1)^2}+2p+1,$$

$$y=\left(\frac{C}{(p-1)^2}+2p+1\right)p^2-2p^3=\frac{Cp^2}{(p-1)^2}+p^2.$$

При $p=0$ и $p=1$ из семейства (5) получаем решения $y=0,\ y=x-2$.

Ответ: $\begin{cases} x=\dfrac{C}{(p-1)^2}+2p+1, \\ y=\dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}+p^2, \end{cases}$ $\quad y=0,\ y=x-2.$

Пример 44. Проинтегрировать уравнение $xy'-y=\ln y'$.

Решение. Это уравнение Клеро. Разрешим уравнение относительно y:

$$y=xy'-\ln y'.$$

Полагая здесь $y'=\dfrac{dy}{dx}=p$ и беря дифференциалы от обеих частей равенства

$$y=xp-\ln p, \tag{7}$$

получаем

$$dy=pdx+xdp-\frac{dp}{p}, \quad \text{или} \quad \left(x-\frac{1}{p}\right)dp=0.$$

Отсюда находим $p=C$ или $p=\dfrac{1}{x}$. Таким образом, подставляя найденные значения p в (7) записываем

Ответ: $y=xC-\ln C$, $y=\ln x+1$.

Пример 45. Найти особое решение дифференциального уравнения, если известно общее решение $y=Cx^2-C^2$.

Решение. Так как функция $\Phi(x,y,C)=y-Cx^2+C^2$ имеет непрерывные частные производные, то огибающая заданного семейства функции удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=y-Cx^2+C^2=0, \\ \dfrac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial C}=-x^2+2C=0, \end{cases}$$

из которой, исключая параметр C, находим $4y = x^4$. Теперь проверим, является ли найденная функция огибающей, т.е. касаются ли ее в каждой точке кривые заданного семейства. Условия касания имеют вид

$$\begin{cases} Cx^2 - C^2 = \dfrac{x^4}{4}, \\ 2Cx = x^3. \end{cases}$$

Выражая из второго равенства C и подставляя в первое, получим тождество

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4}.$$

Последнее означает, что функция $4y = x^4$ является огибающей, а значит, и особым решением искомого уравнения с заданным семейством кривых.

Задания для самостоятельной работы

В задачах 94-98 найти все решения данных уравнений; выделить особые решения (если они есть); сделать чертеж.

94. $y'^2 - y^2 = 0.$ 95. $8y'^3 = 27y.$ 96. $(y'+1)^3 = 27(x+y)^2.$

97. $(y'^2+1)y^2 = 1.$ 98. $xy'^2 = y.$

Уравнения 99-102 разрешить относительно y' и найти общие решения. Найти также особые решения, если они есть.

99. $xy'(xy'+y) = 2y^2.$ 100. $xy'^2 - 2yy' + x = 0.$

101. $xy'^2 = y(2y'-1).$ 102. $y'^2 - 2xy' = 8x^2.$

Уравнения 103-106 решить методом введения параметра.

103. $y = y'^2 + 2y'^3.$ 104. $x = y' + y'^3.$

105. $y = (y'-1)e^{y'}.$ 106. $y'(x - \ln y') = 1.$

Решить уравнения Лагранжа и Клеро.

107. $y = xy' - y'^2.$ 108. $2xy' - y = \ln y'.$

109. $2y'^2(y - xy') = 1.$ 110. $y = xy'^2 - \dfrac{1}{y'}.$

111. Найти особое решение дифференциального уравнения, если известно семейство решений этого уравнения:

а) $Cy=(x-C)^2$, б) $y=C(x-C)^2$,

в) $xy=Cy-C^2$, г) $y=Cx+C^2$.

112. Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник площади $2a^2$.

113. Найти кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков, равна 1.

114. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что отрезок нормали к ней, отсекаемый сторонами первого координатного угла, имеет постоянную длину, равную 2.

2.6. Контрольная работа

Вариант 1.

1. Решить уравнение $(2x+y+2)dx-(4x+2y+9)dy=0$.
2. Решить уравнение $(x+y+1)dx+(x-y+3)dy=0$.
3. Решить уравнение $2xy'=y-2xy^3$.
4. Решить уравнение $(2x^3y+x^2y^4)dx+(x^4+x^3y^3)dy=0$.
5. Найти общее и особое решения уравнения $(y')^2-4y'+4y=8x-24$.

Вариант 2.

1. Решить уравнение $(4-x-2y)dx-2(1+x+2y)dy=0$.
2. Решить уравнение $(2x-y-2)dx+(x+y-4)dy=0$.
3. Решить уравнение $2x^2y'=2y^3-xy$.
4. Решить уравнение $(3x^2y+7y^2)dx-(2x^3+5xy)dy=0$.
5. Найти общее и особое решения уравнения $(y')^2-8xy'+8x^2+4y=0$.

Вариант 3.

1. Решить уравнение $(2y-x+1)dx+(4y-2x+6)dy=0$.
2. Решить уравнение $(x+2y-5)dx+(y-x-4)dy=0$.
3. Решить уравнение $xy'=3xy^2-4y$.

4. Решить уравнение $(2y - x^2y^2)dx - (x^3y - x)dy = 0.$

5. Найти общее и особое решения уравнения $(y')^2 + xy^2y' + y^3 = 0.$

Вариант 4.

1. Решить уравнение $(y - 3x + 2)dx + (3x - y - 1)dy = 0.$

2. Решить уравнение $(x - 1)dx + (3x + 2y + 3)dy = 0.$

3. Решить уравнение $xy' = 2y - 4x^2y^2.$

4. Решить уравнение $(4x^3y + 3y^2)dx - (2x^4 + xy)dy = 0.$

5. Найти общее и особое решения уравнения $2y^2(y')^2 - 2x(y')^2 + 4yy' = -1.$

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3.1. Методы понижения порядка уравнений

Рассмотрим основные классы уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad 1 \le k < n$$

с помощью замены $y^{(k)} = z$ приводится к уравнению $(n-k)$-го порядка:

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Пример 46. Решить уравнение $x^2 y'' = y'^2$.

Решение. В уравнение явно не входит искомая функция, поэтому, сделав замену $y' = z$, будем иметь

$$x^2 z' = z^2. \qquad (1)$$

Решение $z = 0$ уравнения (1), порождает решение $y = C$ исходного уравнения. Разделяя переменные, найдем ненулевые решения уравнения (1)

$$z = \frac{x}{1 + C_1 x}.$$

Если $C_1 = 0$, то $z = x$, а значит, $y' = x$, следовательно, $y = \frac{x^2}{2} + C$.

При $C_1 \ne 0$ имеем $y' = \frac{x}{1 + C_1 x}$, откуда $y = \frac{1}{C_1} x - \frac{1}{C_1^2} \ln\left|1 + C_1 x\right| + C_2$.

Ответ: $y = C$, $2y = x^2 + C$, $C_1 x - C_1^2 y = \ln\left|1 + C_1 x\right| + C_2$, $C_1 \ne 0$.

2. Если уравнение не содержит явно независимую переменную x, т.е. имеет вид

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (2)$$

то порядок уравнения можно понизить на единицу, взяв за новую искомую функцию $y' = p$, а за независимую переменную y.

Пример 47. Решить уравнение $yy''+1=y'^2$.

Решение. В уравнение явно не входит независимая переменная x. Полагаем $y'=p(y)$. Тогда

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'(y)p(y).$$

Подставляя выражения $y'=p,\ y''=p'p$ в уравнение, получим

$$yp'p+1=p^2,$$

или

$$yp\frac{dp}{dy}=p^2-1. \tag{3}$$

Разделяя переменные $\dfrac{pdp}{p^2-1}=ydy$ и интегрируя, найдем все решения

$$\ln\left|p^2-1\right|=2\ln y+\ln|C|, C\neq 0, \qquad p^2-1=Cy^2, \quad p=\pm\sqrt{Cy^2+1}.$$

При $C=0$ получаем решения $p=\pm1$ уравнения (3), которые были потеряны при делении обеих частей этого уравнения на p^2-1.

Возвращаясь к старым переменным, придем к уравнению

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{Cy^2+1}. \tag{4}$$

Рассмотрим три случая. При $C=0$, получаем решения вида $y=C_1\pm x$. При $C<0$ уравнение (4) принимает вид

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{1-C_1^2y^2}}=dx.$$

Откуда

$$\pm\frac{1}{C_1}\arcsin C_1y=x+C_2\,,\ \pm\arcsin C_1y=C_1x+C_2\,,$$

или

$$\pm C_1y=\sin\left(C_1x+C_2\right), C_1\neq 0.$$

При $C>0$ разделяем переменные в уравнении (4)

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C^2y^2+1}}=dx.$$

Отсюда

$$\pm\frac{1}{C}\ln\left(Cy+\sqrt{C^2y^2+1}\right)=x+C_1,$$

или

$$\pm ArshCy=Cx+C_1.$$

Учитывая нечетность гиперболического синуса, запишем $\pm Cy=sh(Cx+C_1)$.

Ответ: $y=C\pm x$, $C_1y=\pm sh(C_1x+C_2)$, $C_1y=\pm\sin(C_1x+C_2)$, $C_1\neq 0$.

3. Пусть уравнение

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0 \tag{5}$$

однородно относительно искомой функции и ее производных с показателем однородности k т.е. выполнено

$$F\left(x,\lambda y,\lambda y',\ldots,\lambda y^{(n)}\right)=\lambda^k F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right),\quad \lambda>0.$$

Тогда делаем замену $y'=yz$, где $z=z(x)$ - новая искомая функция. После подстановки производных

$$y'=yz,\ y''=(yz)'=yz'+y'z=yz'+yz^2,\ldots$$

в уравнение и сокращения на y^k (при этом не теряется решение $y=0$) получается уравнение $(n-1)$-го порядка относительно z.

Пример 48. Понизить порядок уравнения $xyy''-xy'^2=yy'$ и решить, пользуясь его однородностью.

Решение. Подставляя выражения $y'=yz$, $y''=y'z+yz'=yz^2+yz'$ в данное уравнение, будем иметь $xy^2\left(z^2+z'\right)-xy^2z^2=y^2z$, или $xz'=z$. Интегрируя последнее уравнение $z=C_1x$, и вспоминая, что $z=\frac{y'}{y}$, придем к уравнению $\frac{y'}{y}=C_1x$ с общим решением $y=C_2e^{C_1x^2}$.

Ответ: $y=C_2e^{C_1x^2}$.

4. Пусть уравнение (5) является обобщенно-однородным, т.е. существуют такие m и k, что при любом $\lambda>0$ выполняется

$$F\left(\lambda x,\lambda^m y,\lambda^{m-1}y',\ldots,\lambda^{m-n}y^{(n)}\right)=\lambda^k F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right).$$

Чтобы узнать, будет ли уравнение обобщено-однородным, и найти число m, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число λ будет входить в каждый член уравнения после указанной выше замены. После нахождения m делаем замену переменных (при $x<0$ полагаем $x=-e^t$)

$$x=e^t,\ y=ue^{mt},$$

t-новая независимая переменная, $u=u(t)$ - новая искомая функция. В результате получим уравнение вида (2).

Пример 49. Понизить порядок уравнения $\frac{y^2}{x^2}+y'^2=3xy''+\frac{2yy'}{x}$ и решить, пользуясь его однородностью.

Решение. Положим $F(x,y,y',y'')=\frac{y^2}{x^2}+y'^2-3xy''-\frac{2yy'}{x}$. Тогда имеем

$$F\left(\lambda x,\lambda^m y,\lambda^{m-1}y',\lambda^{m-2}y''\right)=\frac{\lambda^{2m}y^2}{\lambda^2x^2}+\lambda^{2m-2}y'^2-3\lambda x\lambda^{m-2}y''-\frac{2\lambda^m y\lambda^{m-1}y'}{\lambda x}=\lambda^k F(x,y,y',y'').$$

Следовательно, m должно удовлетворять равенствам $2m-2=m-1=k$, откуда находим $m=1,\ k=0$, поэтому данное уравнение является обобщенно-однородным. Выполним замену $x=e^t,\ y=u(t)e^t$ и найдем производные

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t}=(ue^t+u'e^t)e^{-t}=u+u',\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dt}e^{-t}=(u''+u')e^{-t}.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид $3u''+3u'-u'^2=0$.

Из последнего уравнения, полагая $u'=z$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$3z'=z^2-3z. \tag{6}$$

Очевидно, что $z=0$ и $z=3$ являются решениями уравнения (6). Остальные решения имеют вид

$$z=\frac{3}{1-Ce^t}.$$

На основании замены $u'=z$, получим три уравнения

$$u'=0,\ u'=3,\ u'=\frac{3}{1-Ce^t},$$

из которых находим три семейства функций

$$u = C,\ u = 3t + C,\ u = 3t - 3\ln\left|1 - C_1 e^t\right| + C_2 .$$

Путем исключения параметра t из системы $x = e^t$, $y = u(t)e^t$, найдем

$$y = Cx,\ y = x(3\ln x + C),\ y = x\left(3\ln\left|\frac{x}{1 - C_1 x}\right| + C_2\right).$$

Заметим, что при $C_1 = 0$ последние два семейства совпадают.

Ответ: $y = Cx$, $y = x\left(3\ln\left|\frac{x}{1 - C_1 x}\right| + C_2\right)$.

5. Порядок заданного уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по x от некоторых функции.

При этом если в процессе преобразования заданное уравнение умножалось на некоторую функцию $\mu = \mu\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right)$, то могут быть введены лишние решения (решения уравнения $\mu = 0$), а также возможна потеря решений (в случае разрывности множителя μ).

Пример 50. Решить уравнение $yy''' + 3y'y'' = 0$, преобразовав его к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

Решение. В силу равенств

$$yy''' + 3y'y'' = yy''' + y'y'' + 2y'y'' = \left(yy'' + y'^2\right)',$$

порядок исходного уравнения понижается на единицу:

$$yy'' + y'^2 = C.$$

Представив последнее уравнение в виде $(yy')' = (C_1 x)'$, будем иметь

$$yy' = C_1 x + C_2.$$

Умножая обе части последнего уравнения на 2, запишем $\left(y^2\right)' = \left(C_1 x^2 + C_2 x\right)'$, из которого окончательно получаем

Ответ: $y^2 = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения 115-122.

115. $2xy'y'' = y'^2 - 1.$ 116. $y^3 y'' = 1.$

117. $2yy'' + y'^2 = 0.$ 118. $y'' = 2yy'.$

119. $yy'' = y'^2 - y'^3.$ 120. $y''^2 + y' = xy''.$

121. $xy''' = y'' - xy''.$ 122. $y''(2y' + x) = 1.$

В задачах 123-130 понизить порядок данных уравнений, пользуясь их однородностью, и решить эти уравнения.

123. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}.$ 124. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'.$

125. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'.$ 126. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}.$

127. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4.$ 128. $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}.$

129. $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'.$ 130. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3.$

Решить уравнения 131-137, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

131. $y'y''' = 2y''^2.$ 132. $yy'' = y'(y'+1).$

133. $5y'''^2 - 3y''y^{(IV)} = 0.$ 134. $yy'' + y'^2 = 1.$

135. $y'' = xy' + y + 1.$ 136. $xy'' = 2yy' - y'.$

137. $xy'' - y' = x^2yy'.$

138. Тело массой m падает с некоторой высоты со скоростью v. При падении тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Найти закон движения падающего тела.

139. Определить кривую, у которой радиус кривизны равен постоянной величине.

3.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и приводящиеся к ним

1. *Однородные уравнения*. Чтобы решить линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами, надо составить характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (2)$$

и найти все его корни.

Если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения (2) действительны и различны, то *общее решение уравнения* (1) выражается формулой

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}. \qquad (3)$$

В общем случае *общее решение уравнения* (1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$, для каждого простого корня λ_i характеристического уравнения и слагаемых вида

$$\left(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \cdots + C_{m+k}x^{k-1}\right)e^{\lambda x} \qquad (4)$$

для каждого кратного корня λ уравнения (2), где k - кратность этого корня.

В *вещественной форме* будем записывать и решения соответствующие комплексным корням характеристического уравнения. Для каждой пары однократных комплексно-сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в формулу (3) будем включать слагаемые вида

$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

и слагаемые

$$\left(C_{m+1} + C_{m+2}x + \cdots + C_{m+k}x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x + \left(C_{m+k+1} + C_{m+k+2}x + \cdots + C_{m+2k}x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\lambda = \alpha + \beta i$ и $\lambda = \alpha - \beta i$ имеет кратность k.

Пример 51. Решить уравнение $y''' + 4y'' - 39y' + 54y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 39\lambda + 54 = 0.$$

Преобразовав левую часть

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 39\lambda + 54 = \lambda^3 + 9\lambda^2 - 5\lambda^2 - 45\lambda + 6\lambda + 54 = (\lambda + 9)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right),$$

найдем корни: $\lambda_1 = -9,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$. Понятно, что найденным корням соответствуют слагаемые вида C_1e^{-9x}, C_2e^{2x}, C_3e^{3x}. Поэтому записываем

Ответ: $y = C_1e^{-9x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$.

Пример 52. Решить уравнение $y^{(V)}-4y^{(IV)}-2y'''+8y''+y'-4y=0$.

Решение. Характеристический многочлен

$$\lambda^5-4\lambda^4-2\lambda^3+8\lambda^2+\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda^2-1)^2=(\lambda-4)(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

имеет корни: $\lambda_1=4,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=1$. Корню 4 соответствует слагаемое C_1e^{4x}, двукратному корню -1 - $(C_2+C_3x)e^{-x}$, и наконец, корню 1 - $(C_4+C_5x)e^{x}$.

Ответ: $y=C_1e^{4x}+(C_2+C_3x)e^{-x}+(C_4+C_5x)e^{x}$.

Пример 53. Решить уравнение $y'''-10y''+34y'=0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3-10\lambda^2+34\lambda=0$ имеет корни

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=5+3i,\ \lambda_3=5-3i.$$

Учитывая, что найденным корням соответствуют слагаемые вида

$$C_1,\ C_2e^{5x}\cos 3x,\ C_3e^{5x}\sin 3x,$$

записываем

Ответ: $y=C_1+C_2e^{5x}\cos 3x+C_3e^{5x}\sin 3x$.

Пример 54. Решить уравнение $y^{(VII)}+2y^{(V)}+y^{(III)}=0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^7+2\lambda^5+\lambda^3=0$ или $\lambda^3(\lambda^2+1)^2=0$ имеет корни

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\ \lambda_4=\lambda_5=i,\ \lambda_6=\lambda_7=-i,$$

следовательно, получим

Ответ: $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5x\cos x+C_6\sin x+C_7x\sin x$.

2. *Неоднородные уравнения. Общее решение линейного неоднородного уравнения*

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{5}$$

с постоянными коэффициентами равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то частное решение уравнения (5) равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1(x),\ f_2(x)$.

В общем случае интегрирование уравнения (5) может быть осуществлено *методом вариации произвольных постоянных.* Однако для правых частей специального вида частное решение неоднородного уравнения может быть найдено *методом неопределенных коэффициентов*.

Для уравнений вида (5) с правой частью

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}, \quad \alpha \in R,$$

где $P_m(x)$ - алгебраический многочлен степени n (в частности многочлен степени 0, т.е. любое число), частное решение уравнения (5) может быть найдено в виде

$$y = x^s Q_m(x)e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)$ - многочлен с неопределенными (искомыми) коэффициентами. Число $s = 0$, если α - не корень характеристического уравнения, а если α корень, то s равно кратности этого корня.

Для уравнения с правой частью вида

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right), \quad \alpha, \beta \in R,$$

частное решение уравнения (5) имеет вид

$$y = x^s e^{\alpha x}\left(M_m(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x\right),$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и s равно кратности этого корня в противном случае, а $M_m(x)$, $N_m(x)$ - многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ (в частности, один из последних многочленов может тождественно равняться нулю).

Пример 55. Решить уравнение $y''' - 2y'' + y' - 2y = e^{4x}\left(34x^2 - 2x + 14\right)$.

Решение. Сначала найдем общее решение y_{00} однородного уравнения

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ имеет различные корни $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$, поэтому $y_{00} = C_1e^{2x} + C_2\cos x + C_3\sin x.$

Так как число 4 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $y_{чн}$ исходного уравнения будем искать в виде

$$y_{чн} = e^{4x}\left(ax^2 + bx + c\right),$$

где a, b, c - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Найдем производные $y_{чн}$ до третьего порядка:

$$y'_{чн} = 4e^{4x}\left(ax^2 + bx + c\right) + e^{4x}\left(2ax + b\right) = e^{4x}\left(4ax^2 + (4b + 2a)x + 4c + b\right),$$

$$y''_{чн} = 4e^{4x}\left(4ax^2 + (4b + 2a)x + 4c + b\right) + e^{4x}\left(8ax + (4b + 2a)\right) = = e^{4x}\left(16ax^2 + (16b + 16a)x + 16c + 8b + 2a\right),$$

$$y'''_{чн} = 4e^{4x}\left(16ax^2 + (16b + 16a)x + 16c + 8b + 2a\right) + e^{4x}\left(32ax + 16b + 16a\right) =$$

$$= e^{4x}\left(64ax^2 + (64b + 96a)x + 64c + 48b + 24a\right).$$

Подставляя выражения для $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ в заданное уравнение, будем иметь

$$e^{4x}\left(34ax^2 + (34b + 66a)x + 30c + 33b + 20a\right) = e^{4x}\left(34x^2 - 2x + 14\right),$$

или, разделив обе части на e^{4x},

$$34ax^2 + (34b + 66a)x + 30c + 33b + 20a = 34x^2 - 2x + 14.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} 34a = 34, \\ 34b + 66a = -2, \\ 30c + 33b + 20a = 14, \end{cases}$$

из которой найдем коэффициенты $a = 1,\ b = -2,\ c = 2.$

Следовательно, частное решение принимает вид $y_{чн} = e^{4x}\left(x^2 - 2x + 2\right)$, а общее решение исходного уравнения - $y = y_{чн} + y_{00}$.

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2\cos x + C_3\sin x + e^{4x}\left(x^2 - 2x + 2\right)$

Пример 56. Найти общее решение уравнения $y''' + 5y'' = -60x^2 + 6x - 24$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -5$, поэтому общее решение y_{00} соответствующего однородного уравнения $y''' + 5y'' = 0$ имеет вид $y_{00} = C_1 + C_2x + C_3e^{-5x}$.

Правую часть заданного уравнения можно представить в виде $e^{0x}\left(-60x^2 + 6x - 24\right)$ и $\lambda = 0$ является двукратным корнем характеристического уравнения, а значит, частное решение $y_{чн}$ неоднородного уравнения можно найти в виде

$$y_{чн} = x^2\left(ax^2 + bx + c\right) = ax^4 + bx^3 + cx^2,$$

где a, b, c - неизвестные коэффициенты.

Подставляя $y_{чн}$ в заданное уравнение, будем иметь

$$60ax^2 + (30b + 24a)x + 10c + 6b = -60x^2 + 6x - 24,$$

откуда

$$\begin{cases} 60a = -60, \\ 30b + 24a = 6, \\ 10c + 6b = -24. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $a = -1,\ b = 1,\ c = -3,$ а значит,

$$y_{чн} = -x^4 + x^3 - 3x^2.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-5x} - x^4 + x^3 - 3x^2$.

Пример 57. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = (2x + 22)\sin x + (16x + 20)\cos x$.

Решение. Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, находим $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,$ откуда $y_{00} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{чн} = (ax + b)\sin x + (cx + d)\cos x.$$

Подставляя выражение для $y_{чн}$ в уравнение и приводя подобные слагаемые, получим

$$(a - 3C)x\sin x + (3a + b - 2C - 3d)\sin x + (3a + C)x\cos x + (2a + 3b + 3C + d)\cos x =$$

$$= 2x\sin x + 22\sin x + 16x\cos x + 20\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях, будем иметь:

$$\begin{cases} a - 3C = 2, \\ 3a + b - 2C - 3d = 22, \\ 3a + C = 16, \\ 2a + 3b + 3C + d = 20, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = 5, \\ b = 3, \\ C = 1, \\ d = -2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y_{чн} = (5x + 3)\sin x + (x - 2)\cos x.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (5x + 3)\sin x + (x - 2)\cos x.$

Пример 58. Решить уравнение $y'' + 9y = e^x - 3\cos 3x$.

Решение. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 9 = 0$ чисто мнимые: $\lambda_1 = 3i,\ \lambda_2 = -3i,$ поэтому $y_{00} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Частное решение $y_{чн1}=\frac{1}{10}e^x$ неоднородного уравнения $y''+9y=e^x$ легко находим, так как равенство $ae^x+9ae^x=e^x$ выполняется только при $a=\frac{1}{10}$.

Подставляя выражение

$$y_{чн2}=x(a\sin 3x+b\cos 3x)$$

в уравнение $y''+9y=-3\cos 3x$ и приводя подобные слагаемые, получим

$$6a\cos 3x-6b\sin 3x=-3\cos 3x,$$

откуда находим $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$ и $y_{чн2}=-\frac{1}{2}x\sin 3x$.

Частное решение $y_{чн}$ исходного уравнения равно сумме $y_{чн1}$ и $y_{чн2}$, а общее решение - $y=y_{00}+y_{чн1}+y_{чн2}$.

Ответ: $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{10}e^x-\frac{1}{2}x\sin 3x.$

5. Для решения задач 175-179 можно пользоваться следующими законами теории электрических цепей.

Для каждого узла цепи сумма всех притекающих токов равна сумме вытекающих токов.

Алгебраическая сумма напряжений источников тока, содержащихся в любом замкнутом контуре цепи, равна алгебраической сумме падений напряжений на всех остальных участках этого контура.

Падение напряжения на сопротивление R равно RI; падение напряжения на самоиндукции L равно $L\frac{dI}{dt}$; падение напряжения на конденсаторе емкости C равно $\frac{q}{C}$, где $q=q(t)$ - заряд конденсатора в момент времени t; при этом $\frac{dq}{dt}=I$; во всех трех случаях $I=I(t)$ - сила тока, протекающего через рассматриваемый участок цепи в данный момент t. В этих формулах I выражается в амперах, R - в омах, L - в генри, q - в кулонах, C - в фарадах, t - в секундах, напряжение – в вольтах.

Пример 59. Последовательно включены: источник тока, напряжение которого меняется по закону $E=V\sin\omega t$, сопротивление R и емкость C. Найти силу тока в цепи при установившемся режиме (установившемся режимом называется такой, при котором сила тока постоянна или меняется периодически).

Решение. Сила тока $I = I(t)$ на любом участке цепи одна и та же (по закону о последовательном соединении). Падение напряжения на сопротивлении равно RI, а на емкости $\frac{q}{C}$. Следовательно, $RI + \frac{q}{C} = V\sin\omega t$. Дифференцируя обе части последнего равенства и учитывая, что $\frac{dq}{dt} = I$, получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = V\omega\cos\omega t. \tag{6}$$

Для отыскания установившегося режима найдем периодическое решение этого уравнения. Исходя из вида правой части уравнения, ищем решение в виде

$$I = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t. \tag{7}$$

В электромеханике важно знать амплитуду изменения силы тока, поэтому выражение (7) переписывают в виде

$$I = A\sin(\omega t - \varphi). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6), переходя к тригонометрическим функциям углов ωt и φ, приравнивая коэффициенты сначала при $\sin\omega t$, а затем при $\cos\omega t$, получим

$$RA\omega\sin\varphi + \frac{A}{C}\cos\varphi = 0,\quad RA\omega\cos\varphi - \frac{A}{C}\sin\varphi = V\omega.$$

Отсюда найдем

$$tg\varphi = -\frac{1}{CR\omega},\qquad A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (C\omega)^{-2}}}.$$

Ответ: $I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (C\omega)^{-2}}}\sin\left(\omega t + arctg\frac{1}{CR\omega}\right).$

3. *Уравнение Эйлера.* Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x), \tag{9}$$

где $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ постоянные, называется *уравнением Эйлера.*

Это уравнение заменой независимой переменной $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)+\cdots+a_{n-2}\lambda(\lambda-1)+a_{n-1}\lambda+a_n=0,$$

т.е. каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в (9) заменяется на произведение k убывающих на единицу чисел: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)$.

Пример 60. Найти общее решение уравнения $x^2y''-4xy'+6y=0$.

Решение. Замена $x=e^t$ приводит заданное уравнение Эйлера к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет вид $\lambda(\lambda-1)-4\lambda+6=0$, или $\lambda^2-5\lambda+6=0$. Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$. Возвращаясь к старым переменным ($t=\ln x$), получим общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y=C_1x^2+C_2x^3$.

Пример 61. Найти общее решение уравнения $x^2y''-xy'+y=8x^3$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$\lambda(\lambda-1)-\lambda+1=0,\quad \lambda^2-2\lambda+1=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=1.$$

Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами запишется в виде $y_{00}=(C_1+C_2t)e^t$. По характеристическому уравнению восстанавливаем левую часть дифференциального уравнения (в новых переменных), а правую часть получаем из правой части заданного уравнения заменой $x=e^t$:

$$y''-2y'+y=8e^{3t}.$$

Так как число 3 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $y_{чн}$ ищем в виде $y_{чн}=ae^{3t}$. Подставляя в последнее уравнение, находим $a=2$. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения в новых переменных имеет вид $y=y_{00}+y_{чн}=(C_1+C_2t)e^t+2e^{3t}$. Заменяя t на $\ln x$, получим общее решение исходного уравнения:

$$y=(C_1+C_2\ln x)x+2x^3,\quad x>0.$$

При $x<0$ получается аналогичная формула, но с $\ln(-x)$ вместо $\ln x$.

Ответ: $y=(C_1+C_2\ln|x|)x+2x^3$.

4. *Уравнение Лагранжа.* Уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x),$$

называют *уравнением Лагранжа* и сводится оно к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимой переменной $ax+b=e^t$.

Пример 62. Решить уравнение $(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = -2\sin\ln(2x+3)$.

Решение. В уравнении делаем подстановку $2x+3=e^t$, тогда

$$x = \frac{e^t}{2} - \frac{3}{2}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{2}dt,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 2e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 2e^{-t}\frac{dy'}{dt} = 2e^{-t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)2e^{-t} = 4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = 2e^{-t}\frac{dy''}{dt} = 2e^{-t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)4e^{-2t} = 8e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

и однородное уравнение принимает вид

$$8\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) + 6\frac{dy}{dt} - 6y = 0,$$

или

$$4\frac{d^3y}{dt^3} - 12\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} - 3y = 0.$$

Найдем корни характеристического многочлена

$$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 11\lambda - 3 = 4\lambda^2(\lambda-1) - 8\lambda(\lambda-1) + 3(\lambda-1) = (\lambda-1)(4\lambda^2 - 8\lambda + 3),$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{3}{2},\ \lambda_3 = \frac{1}{2}.$$

Тогда общее решение последнего уравнения будет

$$y_{00} = C_1e^t + C_2e^{3t/2} + C_3e^{t/2}.$$

Исходное уравнение, с учетом подстановки $2x+3=e^t$, принимает вид

$$4\frac{d^3y}{dt^3} - 12\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} - 3y = -130\sin t.$$

Следовательно, частное решение $y_{чн}$ этого уравнения будем искать в виде $y_{чн} = a\cos t + b\sin t$. Подставляя в последнее уравнение, получаем равенство

$$(9b - 7a)\sin t + (9a + 7b)\cos t = -130\sin t,$$

вместе с вытекающей из него системой

$$\begin{cases} 9b - 7a = -130, \\ 9a + 7b = 0, \end{cases}$$

из которой находим $a = 7,\ b = -9$. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_{00} + y_{чн} = C_1 e^t + C_2 e^{3t/2} + C_3 e^{t/2} + 7\cos t - 9\sin t.$$

Возвращаясь к старым переменным и учитывая, что для заданного уравнения область определения есть все решения неравенства $2x + 3 > 0$, получим общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y = C_1(2x+3) + C_2\sqrt{(2x+3)^3} + C_3\sqrt{(2x+3)} + 7\cos\ln(2x+3) - 9\sin\ln(2x+3).$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения 140-151.

140. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

141. $y''' - 5y'' + 6y' = 0$.

142. $y^{(IV)} - 41y'' + 400y = 0$.

143. $y''' - 6y'' + 13y' = 0$.

144. $y^{(IV)} - y = 0$.

145. $y^{(IV)} + 13y'' + 36y = 0$.

146. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

147. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

148. $y^{(IV)} - 2y'' + y = 0$.

149. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0$.

150. $y^{(VI)} - 4y^{(V)} + 8y^{(IV)} - 8y''' + 4y'' = 0$.

151. $y^{(IV)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

В задачах 152-157 построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

152. $y_1 = x^2 e^x.$

153. $y_1 = e^{2x}\cos x.$

154. $y_1 = x\sin x.$

155. $y_1 = xe^x\cos 2x.$

156. $y_1 = xe^x,\ y_2 = e^{-x}.$

157. $y_1 = x,\ y_2 = \sin x.$

158. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ ограничены на всей числовой оси?

159. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

160. При каких a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно ненулевое решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$?

161. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$, кроме нулевого, монотонно возрастает по абсолютной величине, начиная с некоторого x?

162. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек x?

Решить уравнения 163-171.

163. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.

164. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$.

165. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

166. $y'' + y = 3x\cos 2x + 4\sin 2x$.

167. $y'' + 4y' + 5y = e^{-x}(2x\cos x + (x+6)\sin x)$.

168. $y'' + 9y = 6\cos 3x$.

169. $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$.

170. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

171. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

В задачах 172-174 принять, что при отклонении груза от положения равновесия на расстояние x пружина действует на него с силой kx, направленной к положению равновесия.

172. Найти период свободных колебаний массы m, подвешенной к пружине, если движение происходит без сопротивления.

173. Один конец пружины закреплен неподвижно, а к другому прикреплен груз массы m. При движении груза со скоростью v сила сопротивления равна hv. При $t = 0$ грузу, находившемуся в положении равновесия, сообщена скорость v_0. Исследовать движение груза в случаях $h^2 < 4km$ и $h^2 > 4km$.

174. Частица массы m движется по оси Ox, отталкиваясь от точки $x = 0$ с силой $3mr_0$ и притягиваясь к точке $x = 1$ с силой $4mr_1$, где r_0 и r_1 - расстояния до этих точек. Определите движение частицы с начальными условиями $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$.

175. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение V, сопротивление R, самоиндукции L и выключателя, который включается при $t=0$. Найти зависимость силы тока от времени (при $t>0$).

176. Решить предыдущую задачу, заменив самоиндукцию L конденсатором емкости C. Конденсатор до замыкания цепи не заряжен.

177. Последовательно включены сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при $t=0$ равен q. Цепь замыкается при $t=0$. Найти силу тока в цепи при $t>0$.

178. Последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону $E=V\sin\omega t$, сопротивление R и самоиндукция L. Найти силу тока в цепи (установившийся режим).

179. Последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону $E=V\sin\omega t$, сопротивление R, самоиндукция L и емкость C. Найти силу тока в цепи (установившийся режим). При какой частоте ω сила тока наибольшая?

Решить уравнения Эйлера

180. $x^2y''-xy'-3y=0$. 181. $x^3y'''+xy'-y=0$.

182. $x^2y'''=2y'$. 183. $x^3y''-2xy=6\ln x$.

184. $x^2y''+xy'+4y=10x$. 185. $x^2y''-6y=5x^3+8x^2$.

186. $x^2y''-2y=\sin\ln x$.

Решить уравнения Лагранжа

187. $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$.

188. $(x+2)^2y''-4(x+2)y'+6y=0$.

189. $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$.

190. $(x+2)^3y'''+9(x+2)^2y''+18(x+2)y'+6y=\ln(x+2)$.

3.3. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

1. *Однородные уравнения.* Линейное однородное уравнение n-го порядка имеет вид

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (1)$$

где заданные функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ непрерывны на интервале $I = (a, b)$.

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ - называются *линейно зависимыми* на множестве I, если найдутся такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, что выполняется тождество

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \quad x \in I, \qquad (2)$$

где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_m^2 > 0$.

Если же тождество (2) имеет место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ - называются *линейно независимыми* на I.

Любая система из n линейно независимых решений уравнения (1) называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Общее решение линейного однородного уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - фундаментальная система решений уравнения (1).

Общего метода для отыскания частного решения линейного уравнения (1) не существует. Однако, в некоторых случаях решение удается найти путем подбора или методом неопределенных коэффициентов.

Если найдено частное решение y_1 уравнения (1), то с помощью подстановки $y = y_1 z$ приходим к уравнению, порядок которого понижается (сохраняя линейность) заменой $z' = u$.

Вронскианом (или определителем Вронского) $W_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(x)$ системы непрерывных вместе со своими производными до $m-1$- го порядка включительно функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ на I называется определитель

$$W_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_m(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_m'(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(x)\end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Если определитель Вронского $W_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала I, то функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$ - линейно независимы на I.*

Если функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$, непрерывные на I вместе со своими производными до $m-1$ го порядка включительно, линейно зависимы на I, то $W_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(x)\equiv 0$.

Для того, чтобы решения $y_1,y_2,\ldots,y_n$ линейного однородного уравнения (1) были линейно независимы на I, необходимо и достаточно, чтобы

$$W_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(x)\neq 0,\quad \forall x\in I.$$

Для вронскиана n решений линейного однородного уравнения (1) имеет место формула Остроградского-Лиувилля

$$W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(x)\equiv W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a_1(s)ds}.$$

Для того, чтобы решения $y_1,y_2,\ldots,y_n$ линейного однородного уравнения (1) были линейно независимы на I, необходимо и достаточно, чтобы вронскиан $W_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(x)$ не обращался в нуль хотя бы в одной точке $x_0\in I$.

Линейное однородное уравнение n - го порядка (1) с линейно независимой системой решений $y_1,y_2,\ldots,y_n$ имеет вид

$$\frac{1}{W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(x)}\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_1^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}\\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) & y^{(n)}\end{vmatrix}=0.$$

Пример 63. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми: а) $x-2,\ x+2$, б) $6x+9,\ 8x+12$.

Решение. а). Составим определитель Вронского первой системы функций

$\begin{vmatrix} x-2 & x+2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x-2-x-2=-4$. По теореме 1 функции $x-2,\ x+2$ не являются линейно зависимыми на всей числовой оси.

б). О линейной зависимости или независимости системы функции $6x+9,\ 8x+12$ с помощью определителя Вронского нельзя ничего сказать, поскольку выполняется тождество

$$\begin{vmatrix} 6x+9 & 8x+12 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 48x+72-48x-72 \equiv 0.$$

Пользуясь определением линейной зависимости, приравняем тождественно к нулю линейную комбинацию заданной системы функции:

$$\alpha_1(6x+9)+\alpha_2(8x+12)\equiv 0,$$

или

$$(6\alpha_1+8\alpha_2)x+9\alpha_1+12\alpha_2\equiv 0,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} 6\alpha_1+8\alpha_2=0, \\ 9\alpha_1+12\alpha_2=0, \end{cases} \Leftrightarrow 6\alpha_1+8\alpha_2=0.$$

Взяв произвольное решение $\alpha_1=-\frac{1}{3},\ \alpha_2=\frac{1}{4}$ последнего алгебраического уравнения с двумя неизвестными, линейная комбинация заданных функции тождественно обращается в нуль, последнее означает линейную зависимость этих функции на всей числовой прямой.

Пример 64. Если определитель Вронского для функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ тождественно равен нулю, то можно ли утверждать, что эти функции будут линейно зависимыми или линейно независимыми?

Решение. Предыдущий пример показывает, что функции могут быть линейно зависимыми. Теперь рассмотрим случай, когда функции линейно независимы.

На интервале $(-1,\ 1)$ определим следующие функции

$$y_1(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(-1,\ 0], \\ 0, & x\in[0,\ 1), \end{cases} \qquad y_2(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-1,\ 0], \\ x^2, & x\in[0,\ 1). \end{cases}$$

Так как $y_1(x)=y_1'(x)=0$ при $x\in[0,\ 1)$, то

$$W_{y_1,y_2}(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \text{ при } x\in[0,\ 1).$$

Аналогично $W_{y_1,y_2}(x)=0$ при $x\in(-1,\ 0]$, поскольку $y_2(x)=y_2'(x)=0$ при $x\in[0,\ 1)$. Следовательно, $W_{y_1,y_2}(x)\equiv 0$ на $(-1,\ 1)$.

С другой стороны, из тождества $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\equiv 0$ на $(-1,\ 0]$ следует, что $\alpha_1 y_1\equiv 0$, т.е. $\alpha_1=0$. Аналогично на $[0,\ 1)$ получаем $\alpha_2=0$. Таким образом, функции y_1, y_2 - линейно независимы.

Пример 65. Найти общее решение уравнения $x^2(x+1)y''-2y=0$, зная частное решение $y_1=1+\dfrac{1}{x}$.

Решение. Для фундаментальной системы y_1, y_2 уравнения по формуле Остроградского-Лиувилля имеем

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=A, \text{ или } y_1y_2'-y_1'y_2=A,$$

где A - некоторое число.

Разделив обе части последнего равенства на $y_1^2=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$, получим

$$\frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{Ax^2}{(x+1)^2}.$$

Отсюда

$$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{Ax^2}{(x+1)^2}dx=A\left(x-\frac{1}{x+1}-2\ln|x+1|\right)+B,$$

$$y_2=A\frac{x+1}{x}\left(x-\frac{1}{x+1}-2\ln|x+1|\right)+A\frac{x+1}{x}=A\left(x+2-2\frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right).$$

Поэтому в качестве второго решения возьмем $y_2=\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x+1}{x}\ln|x+1|$.

Тогда общее решение записывается в виде $y=C_1y_1+C_2y_2$.

Ответ: $y=C_1\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+C_2\left(\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x+1}{x}\ln|x+1|\right)$.

Пример 66. Найти общее решение уравнения $(2x+1)y''+4xy'-4y=0$.

Решение. Поскольку функция $x=-\frac{1}{2}$ не удовлетворяет уравнению, то общее решение исходного уравнения совпадет с общим решением уравнения

$$y''+\frac{4x}{2x+1}y'-\frac{4}{2x+1}y=0,$$

а значит, для заданного уравнения (как и для последнего) $x\neq-\frac{1}{2}$.

Частное решение y_1 будем искать в виде $y_1=e^{ax}$, где a - неизвестная константа. Подставляя y_1 в уравнение и сокращая обе части на e^{ax}, получим равенство

$$(2x+1)a^2+4xa-4=0,$$

или

$$\left(2a^2+4a\right)x+a^2-4=0,$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} 2a^2+4a=0, \\ a^2-4=0, \end{cases} \Leftrightarrow a=-2.$$

Следовательно, $y_1=e^{-2x}$ - частное решение уравнения. Второе частное решение y_2 уравнения найдем по формуле Остроградского-Лиувилля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=Ae^{-\int\frac{4x}{2x+1}dx},$$

или

$$y_1y_2'-y_1'y_2=Be^{-2x}|2x+1|,$$

где числа A и B не равны нулю.

Пусть $x>-\frac{1}{2}$. Тогда, разделив обе части последнего равенства на $y_1^2=e^{-4x}$, получим

$$\frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=Be^{2x}(2x+1).$$

Откуда имеем

$$\frac{y_2}{y_1}=B\int e^{2x}(2x+1)dx=B\left(\int xde^{2x}+\int e^{2x}dx\right)=B\left(xe^{2x}-\int e^{2x}dx+\int e^{2x}dx\right)=Bxe^{2x},$$

$$y_2=Bxy_1e^{2x}=Bx.$$

В качестве второго частного решения выберем $y_2=x.$ При $x<-\frac{1}{2}$ и $B=-1$можно выбрать это же частное решение $y_2=x.$ Тогда общее решение принимает вид $y=C_1y_1+C_2y_2$.

Ответ: $y=C_1x+C_2e^{-2x},\quad x\neq\frac{1}{2}.$

Пример 67. Найти общее решение уравнения $x(x-1)y''-xy'+y=0$.

Решение. Функции $x=0$ и $x=1$ не удовлетворяют уравнению, поэтому можно перейти к уравнению

$$y''-\frac{1}{x-1}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$$

или в исходном уравнении считать $x\neq 0,\ x\neq 1$.

Найдем частное решение в виде многочлена

$$y=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_n.$$

Сначала найдем степень m многочлена. Подставляя эту функцию в уравнение и выписывая только члены с самой старшей степенью переменной x, получим

$$m(m-1)x^m+\cdots-mx^m+\cdots+x^m+\cdots=0.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при наивысшей степени x, будем иметь

$$m(m-1)-m+1=0.$$

Отсюда $m=1$ степень искомого многочлена. Подставляя в заданное уравнение $y=x+b$, придем к равенству $-x+x+b=0$, или $b=0$. Итак, многочлен $y_1=x$ является частным решением исходного уравнения.

С помощью подстановки $y=y_1z=xz$ уравнение приводится к виду

$$\left(x^3-x^2\right)z''+\left(x^2-2x\right)z'=0,$$

или

$$z''+\frac{x-2}{x(x-1)}z'=0.$$

Из последнего заменой $z' = u$ получаем линейное однородное уравнение первого порядка

$$u' + \frac{x-2}{x(x-1)}u = 0,$$

откуда находим общее решение $u = C_1\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

Интегрируя уравнение

$$z' = u = C_1\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right),$$

окончательно находим

$$z = C_1\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) + C_2, \text{ или } y = C_1(x\ln|x| + 1) + C_2 x.$$

Ответ: $y = C_1 x + C_2(x\ln|x| + 1),\ x \neq 1.$

Пример 68. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее частные решения $y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x$.

Решение. Определитель Вронского заданных функции

$$W_{y_1,y_2,y_3}(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$$

отличен от нуля, поэтому искомое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x & y \\ 0 & \sin x & \cos x & y' \\ 0 & \cos x & \sin x & y'' \\ 0 & \sin x & \cos x & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

или, разлагая определитель по элементам последнего столбца, получим

$$y''' + y' = 0.$$

Заметим, что все решения этого уравнения определены на всей числовой оси

Метод инварианта. Линейное однородное уравнение

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

с помощью замены $y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int a(x)dx\right)$ сводится к уравнению

$$z'' + c(x)z = 0,$$

где $c(x) = b(x) - \frac{1}{4}a^2(x) - -\frac{1}{2}a'(x)$ - называется инвариантом уравнения. Последнее уравнение является уравнением с постоянными коэффициентами или уравнением Лагранжа, если $c(x) \equiv C$ или $c(x) = \frac{C}{(ax+b)^2}$ ($a, b, C = const$) соответственно.

Пример 69. Решить уравнение $y'' + 2xy' + (x^2+6)y = 0$.

Решение. Найдем инвариант уравнения

$$c(x) = b(x) - \frac{1}{4}a^2(x) - -\frac{1}{2}a'(x) = x^2 + 6 - \frac{1}{4}\cdot 4x^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 5.$$

Заменой $y = z\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int 2xdx\right)$ сводится к уравнению $z'' + 5z = 0$, общее решение которого имеет вид $z = C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x$. Следовательно, общее решение исходного уравнения записывается $y = e^{\frac{-x^2}{2}}\left(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x\right)$.

Ответ: $y = e^{\frac{-x^2}{2}}\left(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x\right)$.

Пример 70. Решить уравнение $y'' - tg\frac{x}{2}y' + \frac{8-x^2}{4x^2}y = 0$ $(0 < x < \pi)$.

Решение. Находим инвариант уравнения

$$c(x) = \frac{8-x^2}{4x^2} - \frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(tg^2\frac{x}{2} - \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right) = \frac{2}{x^2}.$$

Заменой

$$y = z\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int tg\frac{x}{2}dx\right) = z\cdot\exp\left(-2\ln\cos\frac{x}{2}\right) = \frac{z}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

данное уравнение сводится к уравнению Эйлера $z'' + \frac{2}{x^2}\cdot z = 0$. Уравнение $\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$, поэтому

$$z = C_1\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}\ln x}{2}\right) + C_2\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}\ln x}{2}\right),$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7} \ln x}{2} \right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7} \ln x}{2} \right) \right).$$

Ответ: $y = \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7} \ln x}{2} \right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7} \ln x}{2} \right) \right).$

2. *Линейные неоднородные уравнения.* Линейное неоднородное уравнение n-го порядка имеет вид

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x),$$

где заданные функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ непрерывны на интервале $I = (a,b)$ и $f(x)$ - тождественно не равна нулю.

Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$ и частного решения неоднородного уравнения.

Если известно общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения с любой правой частью находится *методом вариации произвольных постоянных* (методом Лагранжа). Сущность этого метода состоит в следующем. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n,$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ - определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \cdots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \cdots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$C_1'(x) = \psi_1(x), \quad C_2'(x) = \psi_2(x), \ldots, C_n'(x) = \psi_n(x),$$

так как главный определитель этой системы обладает свойством

$$\Delta(x) = W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(x) \neq 0, \quad \forall x \in I.$$

Метод Коши. Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено и методом Коши. Решение уравнения (1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y(x_0)=y'(x_0)=\ldots=y^{(n-1)}(x_0)=0,\quad x_0\in I,$$

находится по формуле Коши

$$y=\int\limits_{x_0}^{x}K(x,s)f(s)ds,$$

где $K(x,s)$ - функция Коши, являющаяся при каждом значении параметра $s\in I$ решением однородного уравнения $L(y)=0$ и удовлетворяющая условиям

$$K(s,s)=K'(s,s)=\ldots=K^{(n-2)}(s,s)=0,\quad K^{(n-1)}(s,s)=1. \tag{22}$$

Функция Коши может быть найдена в виде

$$K(x,s)=C_1(s)y_1+C_2(s)y_2+\cdots+C_n(s)y_n,$$

где $y_1,y_2,\cdots,y_n$ - фундаментальная система решений уравнения $L(y)=0$, а коэффициенты $C_1(s),C_2(s),\cdots,C_n(s)$ определяются так, чтобы удовлетворялись условия (22).

Если $y_i,\ i=1,2,\ldots,m$ являются решениями неоднородного уравнения

$$L(y)=f_i(x),\quad i=1,2,\ldots,m,$$

то функция $y=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots\alpha_my_m$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$L(y)=\alpha_1f_1(x)+\alpha_2f_2(x)+\cdots+\alpha_nf_n(x),$$

где $\alpha_i,\ i=1,2,\ldots,m$ - постоянные.

Для любых двух решений y_1,y_2 неоднородного уравнения $L(y)=f(x)$, разность y_1-y_2 является решением соответствующего однородного уравнения $L(y)=0$.

Пример 71. Решить уравнение $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

Решение. Общее решение однородного уравнения записывается в виде

$$y_{00}=(C_1+C_2x)e^x,$$

поскольку характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет двукратный корень: $\lambda_1=\lambda_2=1$.

Частное решение $y_{чн}$ неоднородного уравнения нельзя найти методом неопределенных коэффициентов, поэтому общее решение заданного уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных (в формуле общего решения), т.е. в виде

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x,$$

где функции $C_1(x), C_2(x)$ - находятся из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x(1+x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое и сокращая обе части на e^x, получим $C_2'(x) = \dfrac{1}{x}$, откуда $C_2(x) = \ln|x| + C_2$. Подставляя выражение для $C_2'(x)$ в первое уравнение системы и сокращая обе части на e^x, приходим к уравнению $C_1'(x) = -1$. Отсюда $C_1(x) = C_1 - x$. Таким образом, общее решение исходного уравнения представимо в виде

$$y = (C_1 - x)e^x + (\ln|x| + C_2)xe^x.$$

Ответ: $y = e^x(x\ln|x| + C_1 x + C_2)$.

Пример 72. Найти общее решение уравнения

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = \sqrt{x}$$

методом вариации произвольных постоянных, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения является многочленом.

Решение. Подставляя многочлен

$$y = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_n$$

в уравнение

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$$

и выписывая только члены при старшей степени x, найдем степень m многочлена:

$$m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0,$$

$$(m-1)(m^2 - 5m + 6) = 0,$$

$$m = 1, \quad m = 2, \quad m = 3.$$

Следовательно, если однородное уравнение допускает решение в виде многочлена, то этот многочлен может быть только многочленом первой, второй или третьей степени. Непосредственной проверкой убеждаемся, что многочлены $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3$ являются в отдельности решениями однородного уравнения, а значит, учитывая их линейную независимость, и фундаментальной системой этого уравнения.

Общее решение исходного уравнения, согласно методу Лагранжа, ищем в виде

$$y = C_1(x)x + C_2(x)x^2 + C_3(x)x^3,$$

где функции $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)x^2 + C_3'(x)x^3 = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)2x + C_3'(x)3x^2 = 0, \\ C_2'(x)2 + C_3'(x)6x = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3},\ \ C_2'(x) = -\sqrt{x},\ \ C_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

откуда

$$C_1(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + C_1,\ \ C_2'(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C_2,\ \ C_3'(x) = \sqrt{x} + C_3,$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3$ - произвольные постоянные.

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \frac{1}{5}x\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}x^2\sqrt{x^3} + x^3\sqrt{x}.$$

Ответ: $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \frac{8}{15}x^3\sqrt{x}.$

Пример 73. Найти общее решение уравнения

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

методом Коши.

Решение. Для нахождения общего решения уравнения остается найти частное решение неоднородного уравнения, поскольку соответствующее однородное уравнение совпадает с предыдущим однородным уравнением. Согласно методу Коши, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\, f(s)ds,$$

где функцию Коши $K(x,s)$ ищем в виде

$$K(x,s) = C_1(s)x + C_2(s)x^2 + C_3(s)x^3,$$

а коэффициенты $C_1(s),\ C_2(s),\ C_3(s)$ найдем из условий

$$\begin{cases} K(s,s) = C_1(s)s + C_2(s)s^2 + C_3(s)s^3 = 0, \\ K'(s,s) = C_1(s) + C_2(s)2s + C_3(s)3s^2 = 0, \\ K''(s,s) = C_2(s)2 + C_3(s)6s = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$C_1(s) = \frac{s}{2},\quad C_2(s) = -1,\quad C_3(s) = \frac{1}{2s}.$$

Поэтому $K(x,s) = \frac{sx}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2s}$ и при $x_0 = 1$ имеем

$$y = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\, f(s)ds = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{sx}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2s} \right) \frac{s}{\sqrt{s}+1} ds =$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{s^5}}{5} - \frac{s^2}{4} + \frac{\sqrt{s^3}}{3} - \frac{s}{2} + \sqrt{s} - \ln\left(\sqrt{s}+1\right) \right)\Bigg|_1^x - x^2\left(\frac{2\sqrt{s^3}}{3} - s + 2\sqrt{s} - 2\ln\left(\sqrt{s}+1\right) \right)\Bigg|_1^x +$$

$$+ x^3\left(\sqrt{s} - 2\ln\left(\sqrt{s}+1\right)\right)\Big|_1^x = \frac{x\sqrt{x^5}}{5} - \frac{x^3}{4} + \frac{x\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + x\sqrt{x} - x\ln\left(\sqrt{x}+1\right) - x\left(\frac{47}{60} - \ln 2\right) -$$

$$- \frac{2x^2\sqrt{x^3}}{3} + x^3 - 2x^2\sqrt{x} + 2x^2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + x^2\left(\frac{5}{3} - 2\ln 2\right) + x^3\left(\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) - 1 + \ln 2\right).$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + y_{чн}.$$

Ответ: $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \frac{8x^3\sqrt{x}}{15} - \frac{5x^2\sqrt{x}}{3} + x\sqrt{x} + \left(2x^2 - x - 2x^3\right)\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$.

Пример 74. Даны три решения $y_1 = x+2,\ y_2 = x^2 - 1,\ y_3 = x^2 + x$ линейного неоднородного уравнения второго порядка. Написать это уравнение и найти его общее решение.

Решение. Сначала найдем общее решение. Возьмем два решения

$$u_1 = y_3 - y_2 = x+1, \;\; u_2 = y_3 - y_1 = x^2 - 2$$

соответствующего однородного уравнения и проверим их линейную зависимость. Определитель Вронского этих функции

$$W_{u_1,u_2}(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x^2-2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 + 2x + 2 > 0, \quad \forall x \in R$$

отличен от нуля, а значит, выбранные функции составляют фундаментальную систему однородного уравнения, поэтому общее решение y_{00} однородного уравнения записывается в виде

$$y_{00} = C_1(x+1) + C_2\left(x^2 - 2\right),$$

а общее решение неоднородного уравнения $y = y_{00} + x + 2$.

Теперь составим неоднородное уравнение. Для этого восстановим однородное уравнение с фундаментальной системой $u_1,\ u_2$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x^2-2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\left(x^2 + 2x + 2\right)y'' - (2x+2)y' + 2y = 0\,.$$

Чтобы получить неоднородное уравнение с той же левой частью, подставим в последнее уравнение частное решение $y_1 = x + 2$. Получим, что она равна 2. Следовательно, искомое уравнение есть

$$\left(x^2 + 2x + 2\right)y'' - (2x+2)y' + 2y = 2.$$

Ответ: $\left(x^2 + 2x + 2\right)y'' - (2x+2)y' + 2y = 2, \;\; y = x + 2 + C_1(x+1) + C_2\left(x^2 - 2\right)$.

Задания для самостоятельной работы

191. Исследовать на линейную зависимость следующие системы функции в той области, где они определены

а) $\sin x,\ \cos x$, б) $1,\ x,\ x^2$, в) $4 - x,\ 2x+3,\ 6x+8$,

г) $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$, д) $\sqrt{x},\ \sqrt{x+1},\ \sqrt{x+2}$, е) $x|x|,\ x^2$, ж) $x,\ |x|,\ 2x+\sqrt{4x^2}$, з) $x,\ x^3,\ |x^3|$.

192. Известно, что для функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ определитель Вронского в точке x_0 равен нулю, а в точке x_1 не равен нулю. Можно ли что-нибудь сказать о линейной зависимости (или независимости) этих функции на отрезке $[x_0,\ x_1]$?

193. Что можно сказать об определителе Вронского функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, если только известно, а) что они линейно зависимы? б) что они линейно независимы?

194. В следующих задачах составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения.

а) $1,\ \cos x$, б) $x,\ e^x$, в) $3x,\ x-2,\ e^x+1$,

г) $x^2-3x,\ 2x^2+9,\ 2x+3$, д) $x,\ x^2,\ e^x$, е) $x,\ x^3,\ |x^3|$.

В следующих задачах найти общие решения данных уравнений, зная их частные решения. В тех задачах, где частное решение не дано, можно искать его путем подбора в виде показательной функции $y_1=e^{ax}$ или алгебраического многочлена $y_1=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots$.

195. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$.

196. $xy''+2y'-xy=0, y_1=\dfrac{e^x}{x}$.

197. $y''-2(1+tg^2x)y=0, y_1=tgx$.

198. $(e^x+1)y''-2y'-e^xy=0, y_1=e^x-1$.

199. $x^2y''\ln x-xy'+y=0$.

200. $y''-y'tgx+2y=0, y_1=\sin x$.

201. $xy'''-y''-xy'+y=0, y_1=x, y_2=e^x$.

202. $x^2(2x-1)y'''+(4x-3)xy''-2xy'+2y=0, y_1=x, y_2=\dfrac{1}{x}$.

203. $(x^2-2x+3)y'''-(x^2+1)y''+2xy'-2y=0, y_1=x, y_2=e^x$.

С помощью метода инварианта решить следующие уравнения.

204. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$. 205. $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0$.

206. $(1+x^2)y''+4xy'+2y=0$. 207. $x^2y''+2x^2y'+(x^2-2)y=0$.

В следующих задачах найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения является многочленом.

208. $x(x+1)y''+(x+2)y'-y=x+\dfrac{1}{x}$.

209. $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x^2+x$.

210. $y'''-\dfrac{3}{x}y''+\dfrac{6}{x^2}y'-\dfrac{6}{x^3}y=3\sqrt{x}-\dfrac{2x}{\sqrt{x}+1}$.

В следующих задачах, зная два частных решения линейного неоднородного уравнения второго порядка, найти его общее решение.

211. $\left(x^2-1\right)y''+4xy'+2y=6x, y_1=x, y_2=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

212. $\left(3x^3+x\right)y''+2y'-6xy=4-12x^2, y_1=2x, y_2=(x+1)^2$.

213. Зная три частных решения $y_1=1, y_2=x, y_2=x^2$ линейного неоднородного уравнения второго порядка, написать его общее решение.

Решить уравнения методом вариации произвольных постоянных

214. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

215. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

216. $y''+4y=2tgx$.

217. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

Найти общие решения следующих уравнений методом Коши

218. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

219. $y'''+y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

220. $y''-y=\dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$.

221. $y''-2y'+y=\dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$.

3.4. Контрольная работа

Вариант 1.

1. Решить уравнение $x^2yy''=(xy'+y)^2, \quad x\neq 0.$
2. Решить уравнение $y''+y'-2y=2xe^{-2x}+5\sin x.$
3. Решить уравнение $y''-4y'+8y=4\left(7-21x+18x^2\right)\sqrt[3]{x}.$
4. Решить уравнение $\left(2x^2+3x\right)y''-6(x+1)y'+6y=x(2x+3)^2, \quad x>0.$

5. Решить уравнение $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 2x^{\frac{5}{2}} e^x.$

6. Составить и решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известны его правая часть $f(x) = 1 - x^2$ и фундаментальная система решений $y_1 = x, \quad y_2 = 1 + x^2.$

Вариант 2.

1. Решить уравнение $xyy'' - yy' = 2x(y')^2, \quad x \neq 0.$

2. Решить уравнение $y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x.$

3. Решить уравнение $y'' - 4y = (15 - 16x^2)\sqrt{x}.$

4. Решить уравнение $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + (2 - 2x)y = (2x - x^2)^2.$

5. Решить уравнение $y'' - \frac{6}{x} y' + \left(\frac{12}{x^2} + 1\right) y = 0.$

6. Составить и решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известны его правая часть $f(x) = 1$ и фундаментальная система решений $y_1 = x, \quad y_2 = x^2 - 1.$

Вариант 3.

1. Решить уравнение $xyy'' + 2x(y')^2 = 2yy', \quad x \neq 0.$

2. Решить уравнение $y'' + 2y' - 3y = 2\cos x - 8xe^{-3x}.$

3. Решить уравнение $y'' + y' = 7(4 + 3x)\sqrt[3]{x}.$

4. Решить уравнение $\frac{\ln x + 1}{2\ln x + 3} y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = (\ln x + 1)^2.$

5. Решить уравнение $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 2.$

6. Составить и решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известны его правая часть $f(x) = \cos 2x$ и фундаментальная система решений $y_1 = \sin^2 x, \quad y_2 = \cos^2 x.$

Вариант 4.

1. Решить уравнение $xyy'' + x(y')^2 + yy' = 0, \quad x \neq 0.$

2. Решить уравнение $y'' + 9y = 6xe^{-3x} - 3\cos 3x.$

3. Решить уравнение $y'' + 2y = 2 - 4x^2 \sin x^2$.

4. Решить уравнение $(1 - \ln x)y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = (1 - \ln x)^2$.

5. Решить уравнение $(x^2 + 1)^2 y'' + 2x(x^2 + 1)y' + y = 1 + x^2$.

6. Найти общее решение уравнения $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = (4x^2 + 4x + 3)e^x$, если известны два его решения $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x + e^{-x^2}$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

12. а) $y_0=0,\ y_1=\dfrac{x^2}{2},\ y_2=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^5}{20}.$

б) $y_0=1,\ y_1=x^3,\ y_2=1+x^3-x+\dfrac{x^7-1}{7}.$

в) $y_0=1,\ y_1=1+2x,\ y_2=x+x^2+\dfrac{e^{2x}+1}{2}.$

г) $y_0=2\pi,\ y_1=\pi+x,\ y_2=2\pi+x+x\cos x-\sin x.$

13. $y_2=1+x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^5}{20},\ |y-y_2|<0{,}0032$.

14. $0{,}87\le x\le 1{,}13$.

15. а) Вся плоскость. б) $y\ne 2x$. в) $x\ne 2,\ y>0$.

г) $y\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$ д) $x>0,\ y\ne x.$ е) $x\ne 0,\ |y|>|x|.$

16. $y=2e^x-x-1$.

17. а) Нет. б) Да.

18. В случае $n=1$ нет решений, при $n=2$ одно решение, при $n=3$ бесконечно много решений.

19. В случае $n=1$ нет решений, если $tg\alpha\ne f(x_0,y_0)$, и одно решение, если $tg\alpha=f(x_0,y_0)$; при $n=2$ одно решение, а при $n\ge 3$ бесконечно много.

20. $n\ge 4$. 22. а) $0\le a\le 1$. б) $a\le 0{,}5$. в) $1\le a\le 1{,}5$.

24. а) $(x^2-y)y'-xy=0.$ б) $y'=\cos\left(\dfrac{x\sqrt{1-y'^2}}{y}\right).$

в) $y^3y''+(y'^2+yy'')^2=0.$ г) $y^2y''(\ln y-1)=y'^2(xy'-y).$

д) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0.$ е) $3y''^2-y'y'''=0.$

25. $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$.

26. $(2x-y)^2(y'^2+1)-(2y'+1)^2=0$.

27. $xy'^2=y(2y'-1)$.

28. $y' = -\dfrac{x}{2y}.$

29. $4yy' = -x.$

30. $y' = -2y.$

31. $(x^2 + y)y' = -x.$

32. $x(1 + y'^2) = -2yy'.$

33. $\rho'\rho \cdot tg2\theta = \rho^2.$

34. $\rho' \sin\theta - (1 + \cos\theta)\rho = 0$. 35. $\rho' + \rho^3 \cdot \sin 2\theta = 0.$

36. $(x + y)y' = y - x$, $(x - y)y' = y + x.$

37. $(x \mp \sqrt{3}y)y' = y \pm \sqrt{3}x.$

38. $(2x \mp \sqrt{3}y)y' = y \pm 2\sqrt{3}x.$

39. $\rho' = \rho ctg(\theta \pm 45^0).$

40. $(x + 2y)y' = -y - 3x$, $(3x + 2y)y' = y - x.$

41. $\ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$, $x = 0.$

42. $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1, y = 0, y(\ln(1 - x^2) + 1) = 1.$

43. $ctg\dfrac{y - x}{2} = x + C, y - x = 2\pi k, k \in Z.$

44. $2x + y - 1 = Ce^x.$

45. $y(1 - Cx) = 1, y = 0, y(1 + x) = 1.$

46. $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}.$

47. $y = -\lg(C - 10^x).$

48. $x + 2y + 2 = Ce^y, x + 2y + 2 = 0.$

49. $(C \pm x)y = 2a^2.$

50. $a\ln\left(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}\right) \mp \sqrt{a^2 - y^2} = x + C.$

51. $y = Cx^2.$

52. $y = Cx^2$, $y^2 = Cx.$

53. Количество азота (в литрах) $x(t)=20-4e^{-\frac{t}{200}}$, $x(t)=19{,}8$ при $t=200\ln 20\approx 600$ сек.

54. Количество соли $x(t)=10e^{-\frac{t}{20}}$, $x(60)=10e^{-3}\approx 0{,}5$ *кг*.

55. Температура тела $x(t)=20+80\cdot 2^{-\frac{t}{10}}$, $x(t)=25$ при $t=40$ мин.

56. Разность температур воды и предмета $x(t)=55\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^t$, $x(t)=1$ при $t=\frac{\ln 55}{\ln 5-\ln 3}\approx 8$ мин.

57. Оставшееся количество вещества $x(t)=x(0)\cdot 2^{-\frac{t}{30}}$, $x(t)=x(0)\cdot 0{,}01$ при $t=\frac{60}{\lg 2}\approx 200$ дней.

58. Оставшееся количество радия $x(t)=x(0)\cdot(1-0{,}00044)^t$, $x(t)=x(0)\cdot 0{,}5$ при $t=\frac{\ln 0{,}5}{\ln(1-0{,}00044)}\approx 1600$ лет.

59. Высота уровня воды $h(t)$; $\sqrt{H}-\sqrt{h}=0{,}3\sqrt{2g}\frac{r^2}{R^2}t$; $h(t)=0$ при $t=\frac{R^2}{0{,}3r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}\approx 1050$ сек.

60. $\sqrt{H^5}-\sqrt{h^5}=\sqrt{2g}\frac{3d^2H^2}{8R^2}t$; $h(t)=0$ при $t=\frac{4R^2}{3d^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}\approx 27$ сек.

61. После сгорания массы x топлива скорость ракеты $v(x)=c\ln\frac{M}{M-x}$; $v(M-x)=c\ln\frac{M}{m}$.

62. $x+y=Cx^2, x=0$. 63. $y=-x\ln\ln Cx$.

64. $(y-x+2)^2+2x=C$. 65. $y+2=Ce^{-2arctg\frac{y+2}{x-3}}$.

66. $y^2-x^2=Cy, y=0$.

67. $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$.

68. $(y+2)^2=C(x+y-1), y=1-x$.

69. $x+2y-2\ln|2y-x-1|=C, y=\frac{1+x}{2}$.

70. $y = C(y^2 + x^2)$.

71. $y^2 + x^2 = Cx$.

72. $y = e^x(\ln|x| + C), x = 0$.

73. $xy = C - \ln|x|$.

74. $y^2 = Cx^2 - 2x, x = 0$.

75. $y = x^4 \ln^2 Cx, y = 0$.

76. $y^{-2} = x^4(2e^x + C), y = 0$.

77. $y^3 = Cx^3 - 3x^2$.

78. $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}, \ y = \frac{2}{x}$.

79. $y = x + \frac{x}{x + C}, \ y = x$.

80. $y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x} - 1}, \ y = x + 2$.

81. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} + x}, \ y = \frac{1}{x}$.

82. $xy = Cx^3 + 2a^2$.

83. $xy = Cy^2 + a^2$.

84. Через 20 мин; 3,68 *кг*.

85. $e^x + xy + x\sin y + e^y = C, \ \ e^x + xy + x\sin y + e^y = 6$.

86. $x^2y + 3xy^2 - y^3 = C$.

87. $xe^{-y} - y^2 = C$.

88. $3x^2y - y^3 = C$.

89. $x - y^2\cos^2 x = C$.

90. $x^2 + \sin^2 y = Cx$.

91. $x - e^{-y}\cos x = C$.

92. $x^2 + 2xy + 2\ln|y| = C, \ y = 0$.

93. $y^2 = x^2(C - 2y), \ x = 0$.

94. $y = Ce^{\pm x}$.

95. $y^2=(x+C)^3;\ y=0.$

96. $y+x=(x+C)^3;\ y=-x.$

97. $y^2+(x+C)^2=1;\ y=\pm 1.$

98. $(y-x)^2=2C(x+y)-C^2;\ y=0.$

99. $yx^2=C;\ y=Cx.$

100. $x^2+C^2=2Cy,\ y=\pm x.$

101. $(x+C)^2=4Cy,\ y=0,\ y=x.$

102. $y=2x^2+C,\ y=-x^2+C$.

103. $x=2p+3p^2+C,\ \ y=2p^3+p^2;\ \ y=0.$

104. $x=p+p^3,\ 4y=3p^4+2p^2+C.$

105. $x=e^p+C,\ y=(p-1)e^p;\ \ y=-1.$

106. $x=\ln p+p^{-1},\ \ y=p-\ln p+C.$

107. $y=Cx-C^2;\ \ 4y=x^2.$

108. $p^2x=p+C,\ \ y=2+2Cp^{-1}-\ln p.$

109. $2C^2(y-Cx)=1;\ 8y^3=27x^2.$

110. $x=\dfrac{Cp^2+2p-1}{2p^2(p-1)^2},\ y=\dfrac{Cp^2+2p-1}{2(p-1)^2}-\dfrac{1}{p}.$

111. а) $y=0,\ y=-4x.$ б) $y=0,\ 27y=4x^3.$ в) $y=4x.$ г) $y=-\dfrac{x^2}{4}.$

112. $xy=\pm a^2.$

113. $y^2+x^2=1.$

114. $\begin{cases} x=\dfrac{p^3+2p}{\sqrt{(p^2+1)^3}}, \\ y=\dfrac{p^2}{\sqrt{(p^2+1)^3}}, \end{cases}\qquad \begin{cases} x=\dfrac{p}{\sqrt{(p^2+1)^3}}, \\ y=\dfrac{2p^2+1}{\sqrt{(p^2+1)^3}}. \end{cases}$

115. $9C_1^2(y-C_2)^2=4(C_1x+1)^3, y=\pm x+C.$

116. $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2.$

117. $y^3=C_1(x+C_2)^2;\ y=C.$

118. $y = C_1 tg(C_1 x + C_2)$; $\ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1 x + C_2$. $y(C - x) = 1$; $y = C$.

119. $y + C_1 \ln|y| = x + C_2$; $y = C$.

120. $y = C_1 \dfrac{x^2}{2} - C_1^2 x + C_2$, $y = \dfrac{x^3}{12} + C$.

121. $y = C_1 (x + 2) e^{-x} + C_2 x + C_3$.

122. $x = C_1 e^p - 2p - 2$, $y = C_1 (p - 1) e^p - p^2 + C_2$.

123. $C_1 x + 4\sqrt{x^5} = \ln C_2 y$; $y = 0$.

124. $y = C_1 \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{C_2}$.

125. $y^2 = C_1 x^3 + C_2$.

126. $y = C_1 |x|^{C_2 - 0,5\ln|x|}$.

127. $4C_1 y^2 = 4x + x(C_1 \ln C_2 x)^2$.

128. $x^2 y = C_1 tg(C_1 \ln C_2 x)$; $C_2 (x^2 y + C_1)|x|^{2C_1} = x^2 y - C_1$; $x^2 y \ln Cx = -1$.

129. $4(C_1 y - 1) = (C_1 \ln C_2 x)^2$.

130. $2C_1 C_2 y = C_2^2 |x|^{2 + C_1} + |x|^{2 - C_1}$.

131. $C_1 y = \ln|C_1 x + C_2| + C_3$; $y = C_1 x + C_2$. 132. $C_1 y - 1 = C_2 e^{C_1 x}$; $y = C - x$; $y = 0$.

133. $y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; $y = \pm\sqrt{C_1 x + C_2} + C_3 x + C_4$. 134. $y^2 = x^2 + C_1 x + C_2$.

135. $y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(C_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C_2 \right) - 1$.

136. $y = C_1 tg(C_1 \ln C_2 x)$; $y - C_1 = C_2 (y + C_1)|x|^{2C_1}$; $y \ln Cx = -1$.

137. $y = 4C_1 tg(C_1 x^2 + C_2)$; $2\ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = C_1 x^2 + C_2$, $y(C - x^2) = 4$; $y = C$.

138. $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}^2$, $x = \dfrac{m}{k} \ln \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, $a = \sqrt{\dfrac{kg}{m}}$.

139. $(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = R$, $R = const$.

140. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

141. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

142. $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{5x} + C_3 e^{-4x} + C_4 e^{4x}$.

143. $y = C_1 + e^{3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$.

144. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

145. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.

146. $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

147. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{2x}$.

148. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (C_3 + C_4 x)e^{x}$.

149. $y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x$.

150. $y = C_1 + C_2 x + e^{x}[(C_3 + C_4 x)\cos x + (C_5 + C_6 x)\sin x]$.

151. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)\cos x + e^{-x}(C_3 + C_4 x)\sin x$.

152. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

153. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

154. $y^{(IV)} + 2y'' + y = 0$.

155. $y^{(IV)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$.

156. $y''' - y'' - y' + y = 0$.

157. $y^{(IV)} + y'' = 0$.

158. $a = 0, b > 0$.

159. $a > 0, b > 0$.

160. $b < 0$ или $a > 0, b \ge 0$.

161. $a \le -2\sqrt{b},\ b > 0$.

162. $a^2 < 4b$. 163. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$.

164. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x\right)e^{x}$.

165. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^{x}$.

166. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos 2x$.

167. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(x\sin x - 2\cos x)$.

168. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x \sin 3x.$

169. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x}.$

170. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5}e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{-x}.$

171. $y = C_1 + C_2 e^{5x} - 0{,}2x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}048x + 0{,}02(\cos 5x - \sin 5x).$

172. $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

173. В случае $h^2 > 4km$ $x = \frac{v_0}{2\gamma}\left(e^{(-\alpha+\gamma)t} - e^{(-\alpha-\gamma)t}\right),$ $\alpha = \frac{h}{2m},$ $\gamma = \frac{\sqrt{h^2 - 4km}}{2m}.$

В случае $h^2 < 4km$ $x = \frac{v_0}{2\gamma}e^{-\alpha t}\sin\gamma t,$ $\alpha = \frac{h}{2m},$ $\gamma = \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m}.$

174. $x = 4 - 2\cos t.$

175. $I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$

176. $I = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$

177. $I = \frac{q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}.$

178. $I = A\sin(\omega t - \varphi),$ $A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$ $\varphi = arctg\,\frac{\omega L}{R}.$

179. $I = A\sin(\omega t - \varphi),$ $A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$ $\varphi = arctg\,\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$

$\max A = \frac{V}{R}$ при $\omega^2 = \frac{1}{LC}$.

180. $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-1}.$

181. $y = x\left(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|\right).$

182. $y = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 x^3.$

183. $y = C_1 x^2 + \frac{1}{x}\left(C_2 - \frac{2}{3}\ln x - \ln^2 x\right).$

184. $y = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x.$

185. $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-2} + x^3 \ln|x| - 2x^2.$

186. $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-1} + 0{,}1\cos\ln x - 0{,}3\sin\ln x.$

187. $y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)\ln(2x+1).$

188. $y = C_1(x+2)^2 + C_2(x+2)^3.$

189. $y = (x-2)^2(C_1 + C_2\ln|x-2|) + x - 1{,}5.$

190. $y = \dfrac{C_1}{x+2} + \dfrac{C_2}{(x+2)^2} + \dfrac{C_3}{(x+2)^3} + \dfrac{\ln(x+2)}{6} - \dfrac{11}{36}.$

191. а) линейно независимы, б) линейно независимы, в) линейно зависимы, г) линейно зависимы, д) линейно независимы, е) линейно независимы, ж) линейно зависимы, з) линейно независимы.

192. Линейно независимы.

193. а) $W \equiv 0$, б) ничего сказать нельзя.

194. а) $y'' - y' ctgx = 0$, б) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, в) $y''' - y'' = 0$.

г) $(2x^2 + 6x - 9)y'' - (4x+6)y' + 4y = 0$, д) $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

е) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0.$

195. $y = e^x(C_1 x^2 + C_2).$

196. $xy = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$

197. $y = C_1 tgx + C_2(1 + xtgx).$

198. $y = C_1(e^x - 1) + \dfrac{C_2}{e^x + 1}.$

199. $y = C_1 x + C_2(\ln x + 1).$

200. $y = C_1 \sin x + C_2\left(2 - \sin x \ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right).$

201. $y = C_1 x + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$

202. $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3(x\ln|x| + 1).$

203. $y = C_1 x + C_2 e^x + C_3(x^2 - 1).$

204. $y = x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$

205. $y = x^2\left(C_1 e^x + C_2 e^{-x}\right).$

206. $y = \dfrac{C_1 x + C_2}{1 + x^2}.$

207. $y = e^{-x}\left(C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x}\right).$

208. $y = C_1(x+2) + \dfrac{C_2}{x} + \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)\ln|x| + \dfrac{3}{2}.$

209. $y = C_1(2x-1) + C_2 e^{-x} + \dfrac{x^2+1}{2}.$

210. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dfrac{8x^3\sqrt{x}}{15} + \dfrac{10x^2\sqrt{x}}{3} - 2x\sqrt{x} + \left(2x^3 - 4x^2 + 2x\right)\ln\left(\sqrt{x} + 1\right).$

211. $y = \dfrac{C_1}{x+1} + \dfrac{C_2}{x-1} + x.$

212. $y = C_1\left(x^2+1\right) + C_2 x^{-1} + 2x.$

213. $y = 1 + C_1(x-1) + C_2\left(x^2 - 1\right).$

214. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right)$

215. $y = \left(C_1 + \ln|\sin x|\right)\sin x + \left(C_2 - x\right)\cos x.$

216. $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \sin 2x \ln|\cos x| - x\cos 2x.$

217. $y = \left(C_1 + C_2 x + \dfrac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5}\right)e^{-x}.$

218. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln|\cos 2x| + \dfrac{1}{2} x \sin 2x.$

219. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \dfrac{1}{\cos x} + \cos x \cdot \ln|\cos x| + \sin x (x - tgx).$

220. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}.$

221. $y = e^x\left(C_1 + C_2 x\right) + \dfrac{1}{x}.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов, М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Высш. шк., 1978. – 287 с.

2. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

3. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

4. Пантелеев, А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, А.В. Босов. – М.: Высш. шк., 2001. – 376 с.

5. Романко, В.К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В.К. Романко, Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко. – М.: ЮНИМЕДИЯСТАЙЛ, 2002. – 256 с.

6. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – Киев: Вища школа, 1984. – 408 с.

7. Сергеев, И.Н. Лекции по дифференциальным уравнениям / И.Н. Сергеев. – М.: Акадения, 2013. – 288 с.

8. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

9. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. / А.Ф. Филиппов. – М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2000. – 175 с.

10. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.

11. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Электронное учебное издание

А.Х. СТАШ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

изображение на обложке:
designed by starline / Freepik

Подписано к использованию 17.11.2025 г.
Объем 6,75 усл. печ. л.
ООО «ЭлИТ». 385020, РФ, Республика Адыгея,
г. Майкоп, а/я 09.
E-mail: elit-publishing@ya.ru